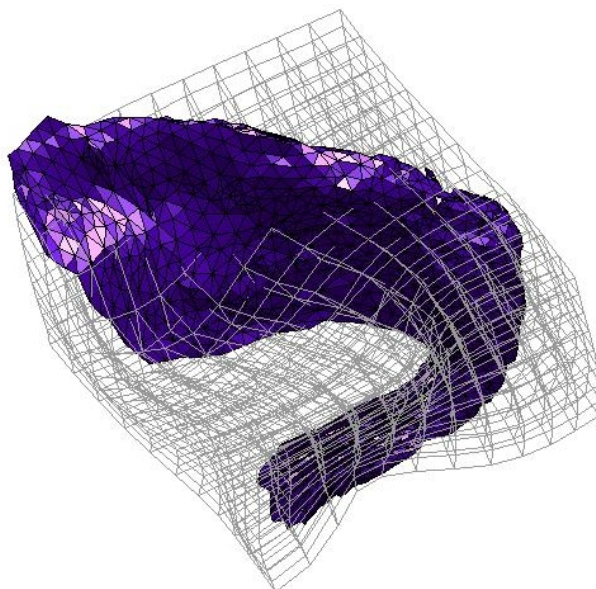

UNIVERSITÉ PARIS 13

LAGA : Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications - UMR 7539

Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 13 en Mathématiques,
présentée et soutenue publiquement le 23 SEPTEMBRE 2005 par Joan Alexis GLAUNÈS

Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique.



DIRECTEURS DE THÈSE

M. Alain Trouvé,
M. Laurent Younes.

RAPPORTEURS

M. Laurent Cohen,
M. David Mumford.

JURY

M. Robert Azencott, Président
M. Sylvain Baillet,
M. Laurent Cohen,
Mme Françoise Dibos,
Mme Christine Graffigne,
M. Alain Trouvé,
M. Laurent Younes.

Table des matières

Introduction	vii
Notations mathématiques	xiii
1 Déformations	1
1.1 Modélisation des déformations élastiques	1
1.1.1 Espace des champs admissibles	1
1.1.2 Flot d'un champ de vecteurs dans L^1_V	2
1.1.3 Lemmes de contrôle	4
1.1.4 Continuité de l'application flot	5
1.1.5 Décroissance à l'infini	6
1.1.6 Différentiabilité du flot	7
1.1.7 Variations du flot par rapport au champ	10
1.1.8 Continuité faible de l'application flot	11
1.1.9 Régularité d'ordre supérieur	12
1.2 Groupe de déformations et géodésiques	17
1.2.1 Le groupe \mathcal{A}_V	17
1.2.2 Existence des géodésiques	20
1.3 Problème d'appariement	20
1.4 Adjonction des déformations rigides	21
1.4.1 Champs générant les déformations rigides	21
1.4.2 Problème d'appariement incluant les déformations rigides	22
2 Méthodes à noyaux	25
2.1 Espaces de Hilbert à noyaux reproduisants	25
2.1.1 Espaces de Hilbert, représentation de Riesz	26
2.1.2 Espaces reproduisants et noyaux	26
2.1.3 Résultats de régularité	30
2.1.4 Noyaux invariants par transformations rigides	32
2.1.5 Noyaux radiaux scalaires	36
2.1.6 Exemples	38
2.1.7 Choix du noyau pour la modélisation des déformations	39
2.2 Principes de réduction pour les problèmes d'appariement	39

2.2.1	Interpolation optimale de champs de vecteurs	40
2.2.2	Interpolation optimale pour le modèle incluant les déformations rigides	41
2.2.3	Principe de réduction	42
2.2.4	Un premier exemple : appariement de points de référence	44
3	Appariement de points sur la sphère	47
3.1	Interpolation par champs splines sur des variétés	47
3.1.1	Cadre mathématique	47
3.1.2	Noyau associé à V	49
3.1.3	Solution du problème d'interpolation	50
3.1.4	Une nouvelle métrique Riemannienne sur M_\star^n	52
3.2	Application à la sphère	53
3.2.1	Transport parallèle sur la sphère	53
3.2.2	Laplacien vectoriel sphérique	53
3.2.3	Les harmoniques sphériques	54
3.2.4	Les champs de vecteurs harmoniques	54
3.2.5	Formule analytique du noyau	55
3.2.6	Calcul numérique du noyau - Formule non singulière	57
3.2.7	Résolution numérique du problème d'interpolation	59
3.3	Appariement de points sur une variété	60
3.3.1	Formulation en termes de géodésiques	60
3.3.2	Difféomorphisme optimal et équivalence des deux approches	60
3.3.3	Appariement avec terme d'attache	62
3.4	Application à la sphère	62
3.4.1	Variation de la fonctionnelle d'appariement	62
3.4.2	Gradient de la fonctionnelle	65
3.4.3	Algorithme	66
3.5	Résultats d'expériences	66
3.5.1	Exemples synthétiques	66
3.5.2	Expériences sur des images projetées du cortex	67
4	Transport et appariement de mesures	73
4.1	Motivation originale : appariement de nuages de points	73
4.2	Modélisation mathématique	74
4.2.1	Mesures de Borel	74
4.2.2	Transport de masse	74
4.2.3	Normes RKHS sur les mesures	75
4.3	Appariement de mesures	76
4.3.1	Définition du problème	76
4.3.2	Consistance	77
4.3.3	Variation du terme d'appariement	78
4.3.4	Cas des mesures ponctuelles	80
4.3.5	Cas des courbes	80

4.3.6	Extension : étiquetage partiel	81
4.4	Expériences	82
4.4.1	Description de l’algorithme	82
4.4.2	Exemples synthétiques	82
4.4.3	Exemples avec données réelles	86
4.4.4	Application aux histogrammes couleur	87
5	Appariement de courants	91
5.1	Formes différentielles et courants	91
5.1.1	Formes multilinéaires alternées	91
5.1.2	Formes différentielles	92
5.1.3	Courants	92
5.1.4	Représentation vectorielle	92
5.2	Action “push-forward”	93
5.2.1	Espaces normés de courants	93
5.3	Problème général de l’appariement de courants	95
5.3.1	Formulation variationnelle	95
5.3.2	Relation avec l’appariement de mesures	95
5.4	Application aux surfaces triangulées	96
5.4.1	Choix de discrétisation	96
5.4.2	Description de l’algorithme	98
5.5	Expériences	98
5.5.1	Exemples synthétiques	98
5.5.2	Expériences sur des segmentations de visages	98
5.5.3	Expériences sur les données segmentées d’hippocampes	102
5.5.4	Expériences sur le Planum Temporale	102
6	Aspects numériques	109
6.1	Algorithme de descente	109
6.1.1	Calcul de la fonctionnelle d’appariement	109
6.1.2	Méthodes d’intégration	115
6.1.3	Méthodes d’optimisation	116
6.1.4	Synthèse du difféomorphisme	116
6.2	Application	117
6.2.1	Appariement de points	117
6.2.2	Appariement de mesures	117
6.2.3	Appariement de courants	117
6.3	Évaluation rapide des noyaux - Méthodes “Fast Multipole”	118
6.3.1	Algorithme IFGT	119
6.3.2	Mise en oeuvre pour un algorithme d’appariement	120
6.3.3	Méthode rapide pour un noyau quelconque	121
6.4	Méthodes multi-échelles	121

6.4.1	Réduction progressive de l'échelle pour l'appariement de mesures ou de courants	121
6.4.2	Déformations multi-échelles	122
7	Hamiltonian flows of curves	127
7.1	Introduction	127
7.2	Diffeomorphic curve and shape matching with large variability	128
7.3	Optimal matching and geodesic shooting for shapes	131
7.3.1	Hypotheses on the compared shapes	131
7.3.2	Momentum Theorem for differentiable driving matching term	132
7.3.3	Proof	133
7.4	Application to measure based matching	136
7.4.1	Measure matching	136
7.4.2	Geometric measure-based matching	138
7.4.3	Current-based matching	139
7.5	Application to shape matching via binary images	141
7.5.1	Shape matching via binary images	141
7.5.2	Momentum Theorem for semi-differentiable driving matching term	142
7.5.3	Momentum description for shape matching via binary images	145
7.6	Application to driving terms based on a potential	147
7.7	Existence and uniqueness of the hamiltonian flow	150
7.8	Conclusion	150

Introduction

L'approche difféomorphique en anatomie numérique

Le traitement automatisé des images médicales est un domaine de recherche actif rendu nécessaire par le développement rapide des techniques d'acquisition et la multiplication des données disponibles. Le but ultime serait, par l'intégration et l'établissement de statistiques sur de grandes bases de données, d'établir des caractérisations de pathologies que l'oeil humain seul ne pourrait découvrir, faute de temps. Au coeur de ces problèmes d'intégration des données se trouve celui de la comparaison de deux images ou objets géométriques de même nature, en particulier l'établissement de correspondances anatomiquement fondées entre ces objets. C'est le problème de l'appariement.

Le cadre objets/groupes/actions

La notion d'action de groupe pour l'anatomie numérique a été introduite par Ulf Grenander [31]. L'idée est de comparer les objets anatomiques à travers l'estimation et l'analyse des déformations de l'espace ambiant. Le modèle théorique abstrait consiste alors à définir l'espace mathématique des objets observés (images, points, surfaces, . . .), un groupe de transformations approprié, et une action de ce groupe sur les objets. Cette approche est motivée par l'intuition, la comparaison visuelle des images provenant de différents sujets suggérant en effet l'existence d'une déformation sous-jacente de l'espace ambiant. L'avantage de cette approche est qu'une fois fixé un groupe de transformations, il devient possible d'analyser et de comparer les déformations estimées à partir de méthodes d'acquisition différentes.

Approche mathématique

La mise au point d'algorithmes précis d'appariement nécessite une modélisation mathématique rigoureuse des objets d'étude, en premier lieu celle des déformations ϕ de l'espace. Les seules transformations rigides ou affines sont insuffisantes pour traduire la complexité des déformations observées en pratique ; il y a en fait nécessité de considérer des espaces fonctionnels de dimension plus grande ou infinie. L'estimation de telles transformations a

d'abord été envisagé en introduisant un modèle d'élasticité sur la changement de coordonnées [6, 10]. Autrement dit, un coût énergétique de déformation est défini pour le champ de déplacement $\phi - \text{id}$. Le principal inconvénient de cette modélisation est qu'elle garantit la régularité de la transformation mais pas son inversibilité, celle-ci étant mise en défaut dès que les contraintes de déformations imposées deviennent grandes. L'approche difféomorphique introduite en [14, 22] consiste à utiliser le modèle précédent non plus comme modèle final mais comme modèle de déformations infinitésimales, les transformations étant alors obtenus par intégration d'une famille de champs de vecteurs, selon des idées inspirées de la mécanique des fluides [3]. Parallèlement, les travaux d'A. Trounev [48, 50] établissaient la théorie mathématique précise de ce nouveau modèle et la construction d'une métrique invariante sur les groupes de difféomorphismes.

Plus précisément, le schéma de construction dans cette approche part de la donnée d'un espace de Hilbert V de champs de vecteurs dont la norme définit le coût des déformations infinitésimales, et les difféomorphismes sont obtenus par intégration d'une famille $(v_t)_{t \in [0,1]}$ de champs de vecteurs appartenant à V , selon l'équation de flot

$$\partial_t \phi_t^v = v_t \circ \phi_t^v.$$

La définition de problèmes d'appariement dans ce contexte nécessite en fait de travailler avec un contrôle L^1 ou L^2 en temps des champs de vecteurs, ce qui éloigne légèrement le modèle de la théorie classique des équations différentielles.

Difféomorphismes sur l'espace euclidien entier

Le choix de l'espace ambiant pour la modélisation des difféomorphismes est un problème important. La construction classique des difféomorphismes [48, 39] suppose que cet espace est une variété compacte ou un ouvert borné de l'espace euclidien. Ce modèle semble suffisant pour la plupart des problèmes pratiques, les données d'analyse pouvant toujours être localisées dans une région bornée de l'espace. Cependant il paraît aussi naturel de vouloir imposer un comportement invariant des solutions d'appariement vis-à-vis des rotations et translations de l'espace, ainsi que de pouvoir associer ces transformations au modèle élastique, celui-ci étant souvent insuffisant pour une analyse complète. L'extension de la théorie des groupes de difféomorphismes au cas de l'espace euclidien entier fait l'objet d'une partie du travail présenté ici. La perte de compacité nécessite de supposer un comportement spécifique de décroissance à l'infini en espace.

Difféomorphismes en géométrie non euclidienne - exemple de la sphère

Un autre avantage de l'approche difféomorphique est la possibilité de sortir du cadre euclidien pour considérer des problèmes d'appariement sur un espace ambiant doté d'une

métrique riemannienne. La modélisation des difféomorphismes comme solutions d’une équation de flot permet en effet de développer la théorie dans le cadre d’une variété, ce que la théorie des champs spline ne peut réaliser. L’exemple de la géométrie sphérique, que nous examinerons en détail au cours de ce travail, possède à ce titre un double intérêt. Le premier, mathématique, est de présenter un premier exemple applicatif non euclidien de la théorie, pour lequel des calculs et des algorithmes peuvent être écrits explicitement. Le deuxième est son utilité pratique pour l’imagerie cérébrale. En effet, un protocole classique [21, 24] de pré-traitement des images fonctionnelles du cortex consiste à “aplatir” chaque hémisphère cérébral sur une sphère afin d’en faciliter l’interprétation et l’analyse. Une fois ces images ainsi projetées, il devient donc nécessaire de définir des algorithmes de traitement adaptés à cette géométrie particulière. Dans cette optique, nous examinons en détail le problème de l’appariement de points caractéristiques sur la sphère.

Méthodes à noyaux

L’analyse des données d’imagerie peut être effectuée soit sur la donnée directe des discrétisations des images sur une grille 2D ou 3D, soit à partir de l’extraction d’éléments significatifs, qui peuvent être de natures géométriques variées : points caractéristiques, bouts de courbe (par exemple localisation des sulci/gyri dans le cortex) ou surfaces. Pour cette deuxième option, les éléments d’analyse, une fois discrétisée, sont alors donnés par un ensemble de points de l’espace, avec ou sans information de connectivité, et les contraintes d’appariement s’écrivent en fonction des déplacements de ces points. L’objet mathématique intervenant naturellement dans une telle situation est le noyau reproduisant de l’espace V des champs de déformations. On montre en effet que les champs de vecteurs optimaux pour de telles contraintes sont des sommes de champs splines centrés sur les trajectoires des points de contrôle :

$$v_t(x) = \sum_{i=1}^n k_V(\phi_t(x^i), x) \alpha_t^i,$$

et que le coût de déformation associé (norme dans l’espace de Hilbert V) s’exprime lui aussi au moyen de cette fonction noyau :

$$\|v_t\|_V^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_t^j \cdot k_V(\phi_t^v(x^i), \phi_t^v(x^j)) \alpha_t^i.$$

Les vecteurs α_t^i apparaissant dans ces formules sont appelés vecteurs moments par analogie avec la mécanique ; ils paramètrent entièrement l’espace de recherche d’une solution optimale.

Dans un tel cadre, il devient plus naturel de considérer ce noyau comme point de départ de la modélisation de l’espace V et des difféomorphismes. Or la théorie des espace

à noyaux reproduisants fournit des résultats précis sur les liens entre les propriétés de l'espace et celles du noyau, en particulier pour la régularité et l'invariance vis-à-vis des transformations rigides. Nous examinerons en détails ces caractérisations, l'objectif final étant de pouvoir décider si tel ou tel noyau conduit à une modélisation admissible du groupe de difféomorphismes.

Appariement non-labellisé et espaces de mesures/courants pour l'appariement de sous-variétés

L'appariement de points non-labellisés est un problème encore peu exploré (voir cependant [15]) mais offrant sans doute de nombreuses applications potentielles. Les procédés classiques d'appariement basés sur des points caractéristiques [23, 2] ont en effet le défaut majeur d'imposer la connaissance préalable des correspondances entre les points. Dans la plupart des cas, celles-ci seront inévitablement obtenues par un procédé manuel. L'appariement non-labellisé présente le double avantage de s'affranchir de cette contrainte et de pouvoir travailler avec des cardinalités différentes pour chacun des deux groupes. L'approche que nous présentons ici consiste à modéliser les groupes de points par des combinaisons linéaires de masses de Dirac et à évaluer les appariements en définissant une norme fonctionnelle aisément calculable, encore une fois grâce au noyau reproduisant de l'espace correspondant. Le développement de cette idée conduit alors à la définition d'un nouveau cadre objets/action dans lequel les objets sont les mesures de Borel, et l'action des difféomorphismes est le transport de masse, action duale de celle définie sur les fonctions. Les méthodes d'appariement écrites dans ce cadre offrent alors une alternative au problème de Monge-Kantorovich, celui-ci ne garantissant aucune propriété d'inversibilité ou de régularité des transformations optimales.

Dans ce nouveau contexte, il devient possible de considérer l'appariement entre deux sous-variétés plongées, en les modélisant par des mesures uniformes sur leurs supports. Une propriété de consistance de la solution du problème d'appariement permet alors de prouver que l'algorithme effectif, écrit pour des mesures masses de Dirac, peut être utilisé pour approcher les appariements optimaux de sous-variétés, ce que l'expérimentation vient confirmer.

Une fois le problème ainsi formulé en termes d'appariement de sous-variétés, la généralisation de la méthode au cas des courants, définis comme formes linéaires sur des espaces de formes différentielles, semble alors naturelle et attrayante. Dans ce cadre d'extension, l'action des difféomorphismes, nommée "push-forward", possède la propriété *géométrique* de correspondre à l'action ensembliste de transport de la sous-variété, ce qui faisait défaut pour la modélisation par mesures de Borel. Nous examinons l'application au cas des surfaces triangulées, et proposons un algorithme effectif testé sur différentes données segmentées de

surfaces corticales.

Aspects algorithmiques

L'utilisation systématique des espaces à noyaux reproduisants pour la modélisation de l'espace V des champs de vecteurs admissibles et pour l'évaluation des mesures/courants conduit à des algorithmes simples d'appariement, la minimisation s'effectuant sur les variables vectorielles α_i^j réparties le long des trajectoires des points de contrôle. Cependant, de telles méthodes impliquant des étapes de double sommation sur les noyaux, voire d'inversion de systèmes linéaires, la complexité algorithmique devient quadratique ou cubique vis-à-vis du nombre n de points de contrôle, ce qui pose problème dans les applications réelles. En prenant garde à l'écriture du schéma de descente de gradient, et par l'utilisation de méthodes rapides d'évaluation des noyaux (du type Fast Multipole [29]), il est possible de proposer un algorithme général en $O(n)$, valable pour tout terme d'attache aux données.

Organisation des chapitres

Le chapitre 1 expose la théorie générale des difféomorphismes dans le cadre de l'espace euclidien entier. Les liens entre régularité des champs de vecteurs et régularité du flot sont examinés en détail, ainsi que la possibilité de travailler simultanément avec les rotations et translations de l'espace.

Le chapitre 2 présente la théorie des espaces à noyaux reproduisants, en l'adaptant au cas des espaces à valeurs vectorielles. Les propriétés de régularité et d'invariance sont traitées.

Le chapitre 3 étudie le problème de l'appariement de points sur une variété compacte. La première partie donne les définitions générales et établit l'équivalence de ce problème avec la recherche de géodésiques pour une métrique spécifique. Le cas de la sphère est ensuite traité, au travers du calcul explicite du noyau associé à l'opérateur laplacien. Ce chapitre reprend en partie les résultats publiés en [27].

Le chapitre 4 développe les idées publiées en [26]. On définit le cadre théorique de l'appariement de mesures de Borel, et on prouve les résultats de convergence et de consistance des solutions. Des expériences sur des données synthétiques et réelles sont présentées.

Le chapitre 5 introduit l'appariement de sous-variétés orientables par leur modélisation en tant que courants, puis traite le cas particulier des surfaces triangulées. Des expériences sur données réelles (visages, hippocampes, planum temporale) sont exposées.

Le chapitre 6 étudie les aspects calculatoires des méthodes utilisées, en passant en revue quelques techniques connues (optimisation, intégration numérique, transformées rapides) pouvant être utilisées avec profit.

Le chapitre 7 correspond en fait à un article en cours de publication [28], développant un point de vue contrôle optimal pour le problème d'appariement de courbes de Jordan. Des résultats précis sur la forme des moments initiaux pour diverses méthodes d'appariement (notamment celle des mesures et celle des courants) sont démontrés.

Notations mathématiques

Ici sont regroupées les notations qui ne sont pas explicitement définies dans le texte.

Soient $p, d, m \geq 1$ des entiers.

Pour deux éléments α et β de l'espace euclidien \mathbf{R}^d , on note $|\alpha|$ la norme euclidienne de α , et $\alpha \cdot \beta$ le produit scalaire de α et β . De manière générale, les notations légères $|\cdot|$ et \cdot seront utilisées pour désigner les normes et produits scalaires définis sur des objets de dimension finie (vecteurs, vecteurs tangents, opérateurs linéaires ou multilinéaires), tandis que les normes et produits scalaires fonctionnels seront notés par $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ l'espace des applications p -linéaires symétriques de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^m . Si $m = d$, on note simplement $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^d)$. Pour tout $A \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$, la norme $|A|$ désignera toujours la borne supérieure des valeurs prises par A sur la boule unité, c'est-à-dire

$$|A| = \sup \{ A(\alpha_1, \dots, \alpha_p), \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}^d, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_p| \leq 1 \}.$$

Lorsque $p = 1$, $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^d)$ est simplement l'espace des applications linéaires de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^m .

L'espace des matrices réelles à m lignes et d colonnes est noté $\mathcal{M}_{d,m}(\mathbf{R})$.

Soit $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$ une application de classe C^p . La dérivée ou différentielle d'ordre p de f est notée $d^p f$. C'est une application de \mathbf{R}^d dans $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$. Son évaluation en un point $x \in \mathbf{R}^d$ et pour des vecteurs $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}^d$ sera notée $d_x^p f(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. La norme $|d_x f^p|$ désigne la norme en tant qu'élément de $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ (cf plus haut).

Pour une fonction f dépendant de plusieurs variables, on notera indifféremment $\partial_1 f$, $\partial_2 f \dots$, ou $\partial_x f$, $\partial_y f \dots$ les différentielles partielles. Par exemple pour une fonction f de deux variables, $\partial_1(f(x, y))\alpha = \partial_x(f(x, y)) = d_x(f(\cdot, y))\alpha$.

Pour une application $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable, on notera $\nabla_x f$ le gradient de f en un point $x \in \mathbf{R}^d$. Pour une fonction de plusieurs variables, on note $\nabla_1 f, \nabla_2 f, \dots$, ou $\nabla_x f, \nabla_y f, \dots$ les gradients respectifs.

L'espace $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ est l'espace des applications $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$, continues et nulles à l'infini. C'est un espace complet lorsqu'il est muni de la norme uniforme, notée $\|f\|_\infty$. Lorsque $m = 1$ on notera simplement $C_0(\mathbf{R}^d)$ au lieu de $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$.

On note $C_0^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ ($C_0^p(\mathbf{R}^d)$ si $m = 1$) l'espace des applications $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$ de classe C^p et telles que f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p s'annulent à l'infini, ce qui signifie : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset \mathbf{R}^d$ tel que pour tout x à l'extérieur de K_ε , $|f(x)| < \varepsilon$ et $|d_x^q f| < \varepsilon$ pour tout entier q entre 1 et p . On munit $C_0^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ de la norme

$$\|f\|_{p,\infty} = \text{Sup}_{x \in \mathbf{R}^d} \left\{ |f(x)| + \sum_{q=1}^p |d_x^q f| \right\}$$

qui en fait un espace de Banach.

Chapitre 1

Déformations

Dans ce chapitre nous étudions la modélisation d'une certaine classe de difféomorphismes à partir de la donnée d'un espace de Hilbert champ de vecteurs réguliers V . L'objectif général est de construire ces déformations élastiques en tant que flots de champs dépendant du temps, en supposant seulement une régularité de type L^1 vis-à-vis de la variable temporelle. On montre alors qu'il n'est pas restrictif de travailler dans l'espace de Hilbert $L^2([0, 1], V)$, ce qui facilite l'étude des problèmes d'appariement écrits dans ce cadre.

Cette approche a déjà fait l'objet d'une construction précise dans le cas où le domaine d'étude est un domaine borné d'un espace euclidien, ou dans le cas d'une variété riemannienne compacte [49, 22, 52]. Ici nous établissons la théorie dans le cas de l'espace euclidien entier, ce qui est en général plus naturel dans les applications, et nous autorise, comme nous le verrons dans la dernière section, à traiter simultanément les déformations rigides de l'espace.

1.1 Modélisation des déformations élastiques

1.1.1 Espace des champs admissibles

Définition 1 *Un espace vectoriel V de champs de vecteurs sur \mathbf{R}^d sera dit admissible s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. V est un espace de Hilbert. Sa norme sera notée $\|\cdot\|_V$ et son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$.
2. $(V, \|\cdot\|_V)$ s'injecte continûment dans $(C_0^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d), \|\cdot\|_{1,\infty})$ des champs de classe C^1 sur \mathbf{R}^d s'annulant à l'infini, ainsi que leurs dérivées partielles. Il existe donc une constante $c_V > 0$ telle que pour tout $v \in V$,

$$\|v\|_{1,\infty} \leq c_V \|v\|_V. \tag{1.1}$$

L'exemple le plus classique d'espace de Hilbert de champs réguliers est l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ pour $s > 0$ défini comme l'ensemble des champs $v \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ dont la transformée de Fourier \hat{v} satisfait

$$\|v\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\omega|^2)^s |\hat{v}(\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

$H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ est un espace de Hilbert, et un résultat classique (cf. [1]) est que $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ s'injecte continûment dans $C_0^k(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ dès que $s > k + \frac{d}{2}$. Nos premiers exemples d'espaces admissibles sont donc les $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ pour $s > 1 + \frac{d}{2}$. Nous verrons au chapitre 2 une méthode pour construire un espace V admissible à partir de son noyau reproduisant, ce qui nous donnera d'autres exemples.

A présent et dans toute ce qui suit, V désignera un espace de champs admissible.

Espaces $L^1([0, 1], V)$ et $L^2([0, 1], V)$

A partir de l'espace V , nous définissons les espaces $L_V^1 = L^1([0, 1], V)$ et $L_V^2 = L^2([0, 1], V)$ des classes d'équivalence d'applications $t \mapsto v_t$ de $[0, 1]$ dans V telles que respectivement $\|v\|_{L_V^1} = \int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty$ et $\|v\|_{L_V^2} = \sqrt{\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt} < \infty$. $(L_V^1, \|\cdot\|_{L_V^1})$ est un espace de Banach et $(L_V^2, \|\cdot\|_{L_V^2})$ est un espace de Hilbert. Notons tout de suite que L_V^2 s'injecte dans L_V^1 puisque pour tout $v \in L_V^2$, $\|v\|_{L_V^1} \leq \|v\|_{L_V^2}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

1.1.2 Flot d'un champ de vecteurs dans L_V^1

Nous allons montrer que l'on peut définir le flot d'un champ $v \in L_V^1$ jusqu'au temps $t = 1$ comme solution d'une équation intégrale. Nous donnons en fait un résultat général pour les équations différentielles avec contrôle L^1 en temps, englobant le cas des systèmes linéaires, et qui nous servira plusieurs fois par la suite.

Lemme 1 *Soit $f : [0, 1] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ une application telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t, \cdot)$ est lipschitzienne de rapport $K_t > 0$ avec $\int_0^1 K_t dt < \infty$, et il existe $x_0 \in \mathbf{R}^d$ tel que $\int_0^1 |f(t, x_0)| dt < \infty$. Alors pour tout $y(0) \in \mathbf{R}^d$ il existe une application continue unique $y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ solution de l'équation intégrale*

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (1.2)$$

En particulier, pour un système linéaire : $f_t(x) = A_t x + B_t$ où $A_t \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ et $B_t \in \mathbf{R}^d$ alors la conclusion tient dès que $\int_0^1 |A_t| + |B_t| dt < \infty$.

Preuve. Pour $0 < s < t < 1$ considérons l'espace $C_{st} = C([s, t], \mathbf{R}^d)$ des applications continues de $[s, t]$ dans \mathbf{R}^d . C_{st} muni de la norme uniforme est un espace complet. Pour

tout $y \in \mathbf{R}^d$, $\gamma \in C_{st}$ et $u \in [s, t]$, on définit :

$$T_y\gamma(u) = y + \int_s^u f(r, \gamma(r))dr.$$

$T_y\gamma$ est bien défini car d'après les hypothèses faites sur f , $\int_s^u |f(r, \gamma(r))|dr \leq \int_s^u |f(r, \gamma(r)) - f(r, x_0)| + |f(r, x_0)|dr \leq (\|\gamma\|_\infty + |x_0|) \int_s^u K_r dr + \int_s^u |f(r, x_0)|dr < \infty$. Le même type de majoration permet d'écrire, pour $u_1, u_2 \in [0, 1]$, $|T_y\gamma(u_1) - T_y\gamma(u_2)| \leq (\|\gamma\|_\infty + |x_0|) \int_{u_1}^{u_2} K_r dr + \int_{u_1}^{u_2} |f(r, x_0)|dr$, expression qui tend vers 0 lorsque u_2 tend vers u_1 , ce qui montre que $T_y\gamma$ est une application continue. On a donc bien défini une opération $T_y : C_{st} \rightarrow C_{st}$. De plus, si η est un autre chemin de C_{st} , on a la majoration

$$\|T_y\gamma - T_y\eta\|_\infty \leq \int_s^t |f(r, \gamma(r)) - f(r, \eta(r))|dr \leq \int_s^t K_r dr \|\gamma - \eta\|_\infty.$$

Ainsi T_y est lipschitzienne de rapport $(\int_s^t K_r dr)$ pour tout $y \in \mathbf{R}^d$. Or cette expression peut être rendue aussi petite que souhaité. En effet, $t \mapsto \int_0^t K_r dr$ est une application continue donc uniformément continue sur $[0, 1]$, et donc $\int_s^t K_r dr$ tend uniformément vers 0 lorsque $t - s$ tend vers 0. Ceci prouve donc qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbf{R}^d$, T_y est une application contractante de C_{st} dès que $t - s < \delta$, et admet donc un unique point fixe que nous notons $u \mapsto y_s(u)$.

L'existence et l'unicité de la solution de (1.2) sur $[0, 1]$ est alors obtenue de proche en proche en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en un nombre fini de segments de longueurs inférieures à δ . □

Grâce à ce résultat, nous sommes en mesure de définir les flots intégraux des champs dépendant du temps $v \in L_V^1$. C'est le point de départ de notre modélisation des déformations élastiques :

Théorème 1 *Soit $v \in L_V^1$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, il existe une application unique $t \mapsto \phi_t^v(x)$ continue de $[0, 1]$ dans \mathbf{R}^d vérifiant l'équation du flot*

$$\phi_t^v(x) = x + \int_0^t v_s \circ \phi_s^v(x) ds. \tag{1.3}$$

Preuve. Les champs v_t satisfont les hypothèses du lemme 1 car d'après les hypothèses d'injection de V , v_t est uniformément borné par $\|v_t\|_{1,\infty} \leq c_V \|v_t\|_V$ et uniformément lipschitzienne pour la même constante, et $\int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty$. On en déduit donc l'existence, l'unicité et la continuité du flot solution de (1.3). □

Pour $s, t \in [0, 1]$, on définit aussi ϕ_{st}^v par l'équation $\phi_{st}^v(x) = x + \int_s^t v_r \circ \phi_{sr}^v(x) dr$. On montre facilement, par unicité de la solution, que $\phi_{st}^v \circ \phi_s^v = \phi_t^v$. En particulier $\phi_{0s} = \phi_s$, et surtout $\phi_{s0} \circ \phi_s = \text{id}$. On montre de même que $\phi_s \circ \phi_{s0} = \text{id}$. Ceci nous amène à énoncer :

Proposition 1 *Pour tout $v \in L_V^1$ et $t \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto \phi_t^v(x)$ est un homéomorphisme de \mathbf{R}^d .*

1.1.3 Lemmes de contrôle

Nous commençons à présent l'étude technique des propriétés de régularité des flots intégraux. Le lemme de Gronwall est l'outil de base pour obtenir les majorations souhaitées. Voici la version à laquelle nous nous référerons par la suite :

Lemme 2 (lemme de Gronwall) *Soient f et g deux fonctions positives mesurables définies sur l'intervalle $[0, 1]$, et $c > 0$ une constante. On suppose que pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$f(t) \leq c + \int_0^t f(s)g(s)ds.$$

Alors pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

Ce lemme nous permet de contrôler l'expression $\phi_t^v(x)$ en fonction des variables t , v , et x . Nous obtenons ainsi les trois lemmes techniques suivants :

Lemme 3 (contrôle en temps) *Pour tous $v \in L_V^1$, $y \in \mathbf{R}^d$, $s, t \in [0, 1]$ avec $s < t$, on a*

$$|\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| \leq \int_s^t \|v_r\|_\infty dr. \quad (1.4)$$

Preuve. Cette majoration s'obtient directement à partir de l'équation intégrale du flot : $\phi_t^v(x) = \phi_s^v(x) + \int_s^t v_r \circ \phi_r^v(x) dr$. \square

Lemme 4 (contrôle en espace) *Pour tous $v \in L_V^1$, $x, y \in \mathbf{R}^d$, $t \in [0, 1]$, on a*

$$|\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| \leq |x - y| \exp\left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds\right). \quad (1.5)$$

Preuve. On a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| &\leq |x - y| + \int_0^t |v_s(\phi_s^v(x)) - v_s(\phi_s^v(y))| ds, \\ &\leq |x - y| + \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |\phi_s^v(x) - \phi_s^v(y)| ds, \end{aligned}$$

et donc par application du lemme de Gronwall,

$$|\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| \leq |x - y| \exp\left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds\right).$$

\square

Lemme 5 (contrôle vis-à-vis du champ) *Pour tous $u, v \in L_V^1$, $x \in \mathbf{R}^d$, $t \in [0, 1]$, on a*

$$|\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| \leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds \right). \quad (1.6)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} |\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^v(x)) ds \right|, \\ &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| + \int_0^t |v_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^v(x))| ds, \\ &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| + \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |\phi_s^u(x) - \phi_s^v(x)| ds, \end{aligned}$$

et donc encore une fois grâce au lemme de Gronwall, on obtient la relation voulue. \square

1.1.4 Continuité de l'application flot

Nous allons voir maintenant que l'application flot, qui à un élément de L_V^1 associe la famille $(\phi_t^v)_{t \in [0,1]}$, est une application localement lipschitzienne (donc en particulier continue) vis-à-vis de la norme uniforme. Il nous faut tout d'abord introduire les espaces appropriés.

Définition 2 *L'espace \mathcal{A}_{id} est l'ensemble des homéomorphismes ϕ de \mathbf{R}^d tels que $\phi - \text{id}$ est borné. On munit \mathcal{A}_{id} de la distance*

$$d(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_\infty + \|\phi^{-1} - \psi^{-1}\|_\infty.$$

Notons que si $\phi - \text{id}$ est borné alors $\phi^{-1} - \text{id}$ est borné par la même constante, puisque $\phi^{-1} - \text{id} = (\text{id} - \phi) \circ \phi^{-1}$.

Proposition 2 *L'espace $(\mathcal{A}_{\text{id}}, d)$ est un espace métrique complet.*

Preuve. Si $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de \mathcal{A}_{id} alors (ϕ_n) et (ϕ_n^{-1}) convergent uniformément vers des applications ϕ et $\tilde{\phi}$ qui sont continues et telles que $\phi - \text{id}$ et $\tilde{\phi} - \text{id}$ sont bornées. De plus pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $\tilde{\phi} \circ \phi(x)$ est la limite de $\phi_n^{-1} \circ \phi_n(x) = x$ par convergence uniforme, et donc $\tilde{\phi} \circ \phi = \text{id}$. De même $\phi \circ \tilde{\phi} = \text{id}$, et donc $\phi \in \mathcal{A}_{\text{id}}$. \square

Enfin on introduit $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}})$ l'espace des applications $t \mapsto \phi_t$ continues de $[0, 1]$ dans \mathcal{A}_{id} . C'est un espace complet pour la métrique

$$D(\phi, \psi) = \sup_{t \in [0,1]} d(\phi_t, \psi_t).$$

Proposition 3 *L'application $\Phi : v \mapsto (\phi_t^v)_{t \in [0,1]}$ définit une application de L_V^1 dans $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}})$ lipschitzienne sur toute partie bornée.*

Remarque 1 *Puisque L_V^2 s'injecte dans L_V^1 , $\Phi : L_V^2 \rightarrow C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}})$ est donc aussi lipschitzienne sur toute partie bornée.*

Preuve. Soient $u, v \in L_V^1$ et $x \in \mathbf{R}^d$. D'après le lemme 5, on a

$$|\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| \leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_\infty ds \right) \quad (1.7)$$

$$\leq \left(\int_0^t \|u_s - v_s\|_\infty ds \right) \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_\infty ds \right). \quad (1.8)$$

Grâce à l'hypothèse d'injection (1.1), on en déduit donc que $\phi_t^u - \phi_t^v$ est borné et satisfait :

$$\|\phi_t^u - \phi_t^v\|_\infty \leq c_V \|u - v\|_{L_V^1} \exp(c_V \|v\|_{L_V^1}).$$

Pour les applications inverses, on obtient la même majoration en considérant les champs $\tilde{u}_t = -u_{1-t}$ et $\tilde{v}_t = -v_{1-t}$. Ainsi,

$$\|\phi_t^u - \phi_t^v\|_\infty + \|(\phi_t^u)^{-1} - (\phi_t^v)^{-1}\|_\infty \leq 2c_V \|u - v\|_{L_V^1} \exp(c_V \|v\|_{L_V^1}). \quad (1.9)$$

En prenant $u = 0$, on voit donc premièrement que les transformations $\phi_t^v - \text{id}$ sont bornées pour tout $v \in L_V^1$, i.e. $\phi_t^v \in \mathcal{A}_{\text{id}}$ pour tout $t \in [0, 1]$. De plus d'après le lemme 3, $\|\phi_t^v - \phi_s^v\|_\infty \leq c_V \int_s^t \|v_r\|_V dr$, ce qui tend vers 0 lorsque s tend vers t . De même $\|(\phi_t^v)^{-1} - (\phi_s^v)^{-1}\|_\infty$ tend vers 0 lorsque s tend vers t . Ainsi $t \mapsto \phi_t^v$ est une application continue de $[0, 1]$ dans \mathcal{A}_{id} . Ceci montre que l'application flot Φ est à valeurs dans $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}})$. Enfin la majoration (1.9) implique directement qu'elle est lipschitzienne sur toute partie bornée de L_V^1 . \square

1.1.5 Décroissance à l'infini

L'hypothèse de décroissance à l'infini des champs $v_t \in V$ se transmet au difféomorphisme ϕ_t^v . Pour le démontrer nous passons par un raisonnement de continuité.

Définition 3 *L'espace $\mathcal{A}_{\text{id},0}$ est l'ensemble des homéomorphismes de \mathbf{R}^d tels que $\phi - \text{id}$ est nul à l'infini, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x| > \delta \Rightarrow |\phi(x) - x| < \varepsilon.$$

Remarquons qu'ici aussi il est inutile d'imposer la même condition pour l'inverse, car si $\phi - \text{id}$ est nul à l'infini, alors $\phi^{-1} - \text{id}$ l'est aussi : en effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $|x| > \delta$ implique $|\phi(x) - x| < \varepsilon$. Alors si $|x| > \delta + \|\phi^{-1} - \text{id}\|_\infty$, on aura $|\phi^{-1}(x)| > \delta$ et donc $|\phi^{-1}(x) - x| = |\phi^{-1}(x) - \phi(\phi^{-1}(x))| < \varepsilon$.

Proposition 4 *L'ensemble $\mathcal{A}_{\text{id},0}$ est un sous-espace fermé de $(\mathcal{A}_{\text{id}}, d)$.*

Preuve. Soit $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_{\text{id},0}$, convergente dans \mathcal{A}_{id} . Notons ϕ sa limite et montrons que $\phi \in \mathcal{A}_{\text{id},0}$. Soit $\varepsilon > 0$; on peut choisir n entier tel que $\|\phi - \phi_n\|_\infty < \varepsilon$ (convergence uniforme), puis $\delta > 0$ tel que $\|\text{id} - \phi_n\|_\infty < \varepsilon$ (car ϕ_n est nul à l'infini). Ainsi $\|\phi - \text{id}\|_\infty < 2\varepsilon$. \square

On considère aussi $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id},0})$ l'espace des applications $t \mapsto \phi_t$ continues de $[0, 1]$ dans $\mathcal{A}_{\text{id},0}$. C'est un sous-espace fermé de $(C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}}), D)$.

Proposition 5 $\Phi(L_V^1) \subset C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id},0})$, et donc pour tout $v \in L_V^1$ et $t \in [0, 1]$, $\phi_t^v - \text{id}$ est nul à l'infini.

Preuve. Par hypothèse, on sait que les champs dans V et leurs dérivées s'annulent à l'infini, mais il n'est pas évident de montrer que cette décroissance est uniforme vis-à-vis de t avec un contrôle L^1 . Nous allons en fait montrer la propriété pour un sous-espace plus régulier, et le résultat sera vérifié par passage à la limite.

Soit $C([0, 1], V)$ l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans V . Il est clair que c'est un sous-espace dense de L_V^1 . Il suffit donc de montrer l'inclusion $\Phi(C([0, 1], V)) \subset C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id},0})$ et le résultat découlera alors de la continuité de Φ , sachant que $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id},0})$ est un sous-espace fermé.

Soit donc $v \in C([0, 1], V)$, et montrons tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbf{R}^d$ tel que $|v_t(x)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par continuité uniforme de $t \mapsto v_t$ dans V , et puisque V s'injecte dans l'espace des champs continus, on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\|v_t - v_s\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|t - s| < \eta$. A présent on considère un η -recouvrement de $[0, 1]$ par une famille finie $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$, et K un compact tel que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $|v_{t_i}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que x n'appartient pas à K . On a alors pour tout $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbf{R}^d \setminus K$, $|v_t(x)| < \|v_t - v_{t_i}\|_\infty + |v_{t_i}(x)| < \varepsilon$ pour un certain indice i . Ainsi nous avons bien montré que la décroissance à l'infini de v_t est uniforme en t .

Montrons alors que les applications $\phi_t^v - \text{id}$ s'annulent à l'infini pour tout $t \in [0, 1]$. On sait déjà qu'elles sont bornées uniformément en temps. Soit donc $M > 0$ tel que $\|\phi_t^v - \text{id}\|_\infty \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors en choisissant $x \in \mathbf{R}^d \setminus K_M$, où K_M est l'ensemble K dilaté de M , on aura $\phi_t^v(x) \in \mathbf{R}^d \setminus K$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc, d'après l'équation du flot, $|\phi_t^v(x) - x| \leq \int_0^t |v_s(\phi_s^v(x))| ds < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{R}^d \setminus K_M$. \square

1.1.6 Différentiabilité du flot

L'injection $V \hookrightarrow C_0^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ permet aussi de montrer la différentiabilité des transformations ϕ_t^v . C'est l'objet du théorème 2. Puis la proposition 6 donne un résultat de continuité vis-à-vis du champ pour ces dérivées.

Théorème 2 *Pour tout $v \in L_V^1$, le flot ϕ_t^v est un difféomorphisme de classe C^1 à chaque instant t , et pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $t \mapsto d_x \phi_t^v$ est une application continue solution de l'équation intégrale*

$$d_x \phi_t^v = \text{id} + \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot d_x \phi_s^v ds. \quad (1.10)$$

De plus il existe des constantes $c_1, c'_1 > 0$ telles que pour tout $v \in L_V^1$,

$$\sup_{t \in [0,1]} \|d\phi_t^v\|_\infty \leq c_1 \exp(c'_1 \|v\|_{L_V^1}). \quad (1.11)$$

Preuve. Soient $x, \alpha \in \mathbf{R}^d$ fixés, avec $|\alpha| \leq 1$, et considérons l'équation intégrale linéaire suivante :

$$y(t) = \alpha + \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot y(s) ds. \quad (1.12)$$

L'hypothèse d'intégrabilité du lemme 1 est satisfaite puisque l'injection dans $C_0^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ assure que $\int_0^1 |d_{\phi_t^v(x)} v_t| dt \leq c_V \int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty$. Ainsi (1.12) admet une solution unique et on a la majoration :

$$|y(t)| \leq 1 + c_V \int_0^t \|v_s\|_V |y(s)| ds,$$

ce qui donne, en appliquant le lemme de Gronwall,

$$|y(t)| \leq \exp\left(c_V \int_0^t \|v_s\|_V ds\right).$$

On a ainsi la majoration voulue, à condition d'identifier $y(t)$ avec $d_x \phi_t^v \cdot \alpha$. Pour cela, introduisons

$$z_\varepsilon(t) = y(t) - \frac{1}{\varepsilon} (\phi_t^v(x + \varepsilon\alpha) - \phi_t^v(x)),$$

et développons à partir des équations intégrales :

$$z_\varepsilon(t) = \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot y(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (v_s \circ \phi_s^v(x + \varepsilon\alpha) - v_s \circ \phi_s^v(x)) ds,$$

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) &= \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot z_\varepsilon(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot (\phi_t^v(x + \varepsilon\alpha) - \phi_t^v(x)) - (v_s \circ \phi_s^v(x + \varepsilon\alpha) - v_s \circ \phi_s^v(x)) ds. \end{aligned}$$

Soit K l'enveloppe convexe de l'ensemble des $\phi_t^v(x + \varepsilon\alpha)$ pour $t \in [0, 1]$ et $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ où ε_0 est fixé. K est un ensemble compact et convexe de \mathbf{R}^d . Pour tous $y, y' \in K$,

$$\begin{aligned} |v_t(y') - v_t(y) - d_y v_t(y' - y)| &= \left| \int_0^1 (d_{y+\lambda(y'-y)} v_t - d_y v_t) \cdot (y' - y) d\lambda \right| \\ &\leq m_{K,t}(|y' - y|)|y' - y|, \end{aligned}$$

où $m_{K,t}$ désigne le module de continuité de dv_t sur K :

$$m_{K,t}(r) = \max\{|d_x v_t - d_y v_t|, x, y \in K, |x - y| \leq r\}.$$

L'application $x \mapsto d_x v_t$ est continue, donc uniformément continue sur K , et donc $\lim_{r \rightarrow 0} m_{K,t}(r) = 0$. Revenant à $z_\varepsilon(t)$ et sachant que d'après le lemme 4 il existe une constante $c(v)$ telle que $|\phi_t^v(x + \varepsilon\alpha) - \phi_t^v(x)| \leq \varepsilon|\alpha|c(v)$, on obtient :

$$|z_\varepsilon(t)| \leq \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |z_\varepsilon(s)| ds + |\alpha| \int_0^1 m_{K,s}(\varepsilon|\alpha|c(v)) ds.$$

soit encore, en appliquant le lemme de Gronwall,

$$|z_\varepsilon(t)| \leq \left(|\alpha| \int_0^1 m_{K,s}(\varepsilon|\alpha|c(v)) ds \right) \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds \right).$$

Or $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 m_{K,s}(r) ds = 0$ par convergence dominée ($m_{K,s}(r)$ est majoré par $2\|v_t\|_{1,\infty}$), donc on obtient bien $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon(t) = 0$. Ainsi ϕ_t^v est différentiable en x et $y(t) = d_x \phi_t^v \cdot \alpha$. \square

Proposition 6 Soit $(v^n)_{n \geq 0}$ une suite convergente vers v dans L_V^1 (convergence forte). Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $d\phi_t^{v^n}$ converge uniformément sur tout compact vers $d\phi_t^v$.

Preuve. Soit $K \subset \mathbf{R}^d$ un compact et $x \in K$. De l'équation intégrale de la différentielle du flot (1.12) nous déduisons celle vérifiée par $d_x \phi_t^{v^n} - d_x \phi_t^v$:

$$d_x \phi_t^{v^n} - d_x \phi_t^v = \int_0^t d_{\phi_s^{v^n}(x)} v_s^n (d_x \phi_s^{v^n} - d_x \phi_s^v) ds + \int_0^t (d_{\phi_s^{v^n}(x)} v_s^n - d_{\phi_s^v(x)} v_s) d_x \phi_s ds \quad (1.13)$$

Montrons que la deuxième intégrale tend vers 0 uniformément sur K . Écrivons :

$$\begin{aligned} |d_{\phi_s^{v^n}(x)} v_s^n - d_{\phi_s^v(x)} v_s| &\leq |d_{\phi_s^{v^n}(x)} v_s - d_{\phi_s^v(x)} v_s| + |d_{\phi_s^{v^n}(x)}(v_s^n - v_s)| \\ &\leq m_{K',s}(\|\phi_s^{v^n} - \phi_s^v\|_\infty) + \|v_s^n - v_s\|_{1,\infty}, \end{aligned}$$

où pour tout $t \in [0, 1]$, $m_{K',t}$ est le module de continuité de dv_t sur K' , le compact K' étant l'enveloppe convexe des $\phi_s^{v^n}(x)$ et $\phi_s^v(x)$ pour $x \in K$, $s \in [0, 1]$ et $n \geq 0$. La quantité $\|\phi_s^{v^n} - \phi_s^v\|_\infty$ est majorée par $r_n = 2c_V e^{c_V \|v\|_{L_V^1}} \|v^n - v\|_{L_V^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc $\int_0^1 m_{K',s}(r_n) ds$ tend vers 0. De plus $\|v_s^n - v_s\|_{1,\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui permet de conclure. Quant à la première

intégrale de (1.13), elle est majorée par $\int_0^t \|v_s^n\|_{1,\infty} |d_x \phi_s^{v^n} - d_x \phi_s^v| ds$, et finalement le lemme de Gronwall appliqué à (1.13) montre que $d_x \phi_t^{v^n} - d_x \phi_t^v$ tend vers 0 uniformément sur K .

\square

1.1.7 Variations du flot par rapport au champ

Théorème 3 (Variations du flot) . Soit $v, \tilde{v} \in L_V^1$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $v^\varepsilon = v + \varepsilon\tilde{v}$. Alors, pour tous $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbf{R}^d$,

$$\partial_\varepsilon \phi_t^{v^\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\phi_t^{v^\varepsilon}(x) - \phi_t^v(x)) = \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} \phi_{st}^v \cdot \tilde{v}_s(\phi_s^v(x)) ds. \quad (1.14)$$

Preuve. Tout d'abord remarquons que $\varepsilon \mapsto \phi_t^{v^\varepsilon}(x)$ est une application continue (proposition 3), et on a la majoration :

$$|\phi_s^v(x) - \phi_s^{v^\varepsilon}(x)| \leq c(v) \|v - v^\varepsilon\|_{L_V^1} = \varepsilon c(v) \|\tilde{v}\|_{L_V^1} \quad (1.15)$$

pour une certaine constante $c(v)$.

Le schéma de la preuve est identique à ce qui a été vu pour le théorème 2 : on devine l'équation intégrale vérifiée par la variation du flot, on montre l'existence et l'unicité de la solution, puis on l'identifie. On part donc de l'équation de flot

$$\phi_t^{v^\varepsilon}(x) = x + \int_0^t v_s^\varepsilon(\phi_s^{v^\varepsilon}(x)) ds.$$

En dérivant de manière formelle, on voit que l'équation vérifiée par $\partial_\varepsilon \phi_t^{v^\varepsilon}(x)$ doit être :

$$y(t) = \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot y(s) ds + \int_0^t \tilde{v}_s(\phi_s^v(x)) ds.$$

Puisque V s'injecte dans $C_0^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$, les hypothèses du lemme 1 sont satisfaites, et donc cette équation admet une solution unique $y(t)$ continue. A présent introduisons

$$z_\varepsilon(t) = y(t) - \frac{1}{\varepsilon} (\phi_t^{v^\varepsilon}(x) - \phi_t^v(x)).$$

En injectant les équations intégrales, il vient

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) &= \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot y(s) ds + \int_0^t \tilde{v}_s(\phi_s^v(x)) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (v_s^\varepsilon(\phi_s^{v^\varepsilon}(x)) - v_s(\phi_s^v(x))) ds, \\ &= \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot z_\varepsilon(s) ds + \int_0^t (\tilde{v}_s(\phi_s^v(x)) - \tilde{v}_s(\phi_s^{v^\varepsilon}(x))) ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot (\phi_s^{v^\varepsilon}(x) - \phi_s^v(x)) - (v_s(\phi_s^{v^\varepsilon}(x)) - v_s(\phi_s^v(x))) ds. \end{aligned}$$

Pour obtenir une majoration de cette expression, on utilise comme dans la preuve du théorème 2 le module de continuité $m_{t,K}$ de dv_t sur l'enveloppe convexe K des $\phi_s^{v^\varepsilon}(x)$ pour $s \in [0, 1]$ et $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, ce qui est bien compact par continuité de $(s, \varepsilon) \mapsto \phi_s^{v^\varepsilon}(x)$. On obtient alors, à partir de la majoration (1.15),

$$|z_\varepsilon(t)| \leq \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |z_\varepsilon(s)| ds + c(v) \|\tilde{v}\|_{L_V^1} \int_0^t (\varepsilon \|v_s\|_{1,\infty} + m_{s,K}(\varepsilon c(v) \|\tilde{v}\|_{L_V^1})) ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, et sachant que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t m_{s,K}(\varepsilon) = 0$, on obtient finalement $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon(t) = 0$. \square

1.1.8 Continuité faible de l'application flot

Nous voyons à présent un résultat de faible continuité de l'application flot qui est fondamental pour définir les problèmes d'appariement (cf. théorème 7). Cependant cette faible continuité n'est vraie que pour la métrique de la convergence uniforme sur tout compact, et non celle de la convergence uniforme globale que nous avons utilisée jusqu'ici (cf. contre-exemple 1.1.8). Cependant dans les applications ce résultat est suffisant.

Proposition 7 *Les applications $(t, x) \mapsto \phi_t^v(x)$ sont uniformément continues, et ce uniformément vis-à-vis du champ v sur toute partie bornée de L_V^2 (équicontinuité).*

Preuve. D'après le lemme 4, les applications ϕ_t^v sont lipschitziennes et le rapport ne dépend que de la norme de v . En particulier, il y a donc bien équicontinuité des $x \mapsto \phi_t^v(x)$ à t fixé, sur toute partie bornée de L_V^2 . Il reste à regarder la dépendance en la variable t . D'après le lemme 3,

$$|\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| \leq c_V \left(\int_s^t \|v_r\|_V dr \right).$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, il vient

$$|\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| \leq c_V \sqrt{(t-s) \int_s^t \|v_r\|_V^2 dr} \leq c_V \|v\|_{L_V^2} \sqrt{t-s}.$$

Il y a donc bien équicontinuité sur une partie bornée de L_V^2 . □

Théorème 4 *Si (v^n) converge faiblement vers v dans L_V^2 , alors pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^d$, $\phi_t^{v^n}$ converge vers ϕ_t^v uniformément sur K et vis-à-vis de $t \in [0, 1]$, i.e. $\sup_{(t,x) \in [0,1] \times K} |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Preuve. Soit (v^n) une suite dans L_V^2 , faiblement convergente vers v . Soit $x \in \mathbf{R}^d$ fixé. On considère à nouveau la majoration (1.6) du lemme 5 :

$$\begin{aligned} |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| &\leq \left| \int_0^t v_s^n(\phi_s^v(x)) - v_s(\phi_s^v(x)) ds \right| \exp \left(c_V \int_0^t \|v_s^n\|_V ds \right), \\ &\leq |\eta(v^n - v)| \exp \left(c_V \int_0^t \|v_s^n\|_V ds \right), \end{aligned}$$

où $\eta : L_V^1 \rightarrow \mathbf{R}^d$ est défini par $\eta(u) = \int_0^t u_s(\phi_s^v(x)) ds$. η est une application linéaire continue car $|\eta(u)| \leq \int_0^1 \|u_s\|_\infty ds \leq c_V \int_0^1 \|u_s\|_\infty ds$. Par conséquent la convergence faible de (v^n) implique que $\eta(v^n - v)$ tend vers 0. De plus puisque (v^n) converge faiblement, c'est une suite bornée, et donc $\exp \left(c_V \int_0^t \|v_s^n\|_V ds \right)$ est borné. Ainsi on a prouvé la convergence

simple des $\phi_t^{v^n}$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il nous reste à montrer que cette convergence est en fait uniforme sur tout compact, ainsi qu'en la variable $t \in [0, 1]$. Soit $K \in \mathbf{R}^d$ un compact et $\varepsilon > 0$ fixé. Du fait de l'équicontinuité de l'ensemble des applications $(t, x) \mapsto \phi_t^v(x)$ et $(t, x) \mapsto \phi_t^{v^n}(x)$ (proposition 7), il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $s, t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbf{R}^d$, et n entier, $|\phi_t^{v^n}(x) - \phi_s^{v^n}(y)| \leq \varepsilon$ dès que $|t - s| + |x - y| \leq \eta$. D'autre part il existe, par compacité de $[0, 1] \times K$, des couples $(t_1, x_1), \dots, (t_N, x_N)$ tels que pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times K$, il existe $i, 1 \leq i \leq N$ tel que $|t - t_i| + |x - x_i| \leq \eta$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| &\leq |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_{t_i}^{v^n}(x_i)| + |\phi_{t_i}^{v^n}(x_i) - \phi_{t_i}^v(x_i)| + |\phi_{t_i}^v(x_i) - \phi_t^v(x)|, \\ &\leq 2\varepsilon + |\phi_{t_i}^{v^n}(x_i) - \phi_{t_i}^v(x_i)|. \end{aligned}$$

Enfin, grâce à la convergence simple des $\phi_t^{v^n}$, pour n assez grand le terme restant devient inférieur à ε pour tout $1 \leq i \leq N$. \square

Contre-exemple

On se place en dimension 1. On choisit une fonction f de classe C^∞ , positive, à support dans $[0, 1]$ et non nulle, puis on pose pour tout $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0, 1]$, $v_t^n(x) = f(x - n)$. On choisit comme espace V l'espace de Sobolev $H^2(\mathbf{R})$. Puisque la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ est invariante par translation, on voit que les normes $\|v_t^n\|_V$ sont toutes égales, et donc (v^n) est une suite bornée dans L_V^2 . On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente. Maintenant on montre facilement que les applications $\phi_t^{v^n}$ sont égales à l'identité en dehors de $[n, n + 1]$ et vérifient $\phi_t^{v^n}(x) = \phi_t^{v^0}(x - n) + n$. Par conséquent, pour tout $p \neq q$, $\|\phi_t^{v^p} - \phi_t^{v^q}\|_\infty$ est égale à une constante non nulle indépendante de p et q . Donc aucune sous-suite ne peut converger pour la norme uniforme globale.

1.1.9 Régularité d'ordre supérieur

Les résultats vus précédemment se généralisent aux dérivées d'ordre supérieur si l'on impose un degré de régularité suffisant sur l'espace V .

Théorème 5 *Supposons que V s'injecte continûment dans $C_0^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ avec $p \geq 1$. Alors pour tout $v \in L_V^1$, le flot ϕ_t^v est un difféomorphisme de classe C^p à chaque instant t , et pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $t \mapsto d_x^p \phi_t^v$ est une application continue solution de l'équation intégrale*

$$d_x^p \phi_t^v = \int_0^t d_x^p (v_s \circ \phi_s^v) ds. \quad (1.16)$$

De plus il existe des constantes $c_p, c'_p > 0$ telles que pour $v \in L_V^1$ et $1 \leq q \leq p$,

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|d^q \phi_t^v\|_\infty \leq c_p \exp(c'_p \|v\|_{L_V^1}). \quad (1.17)$$

Preuve. Nous allons raisonner par récurrence sur $p \geq 1$, le cas $p = 1$ ayant déjà été démontré (théorème 2). Le schéma de la preuve est en fait identique ici. Soit donc $p \geq 2$ et supposons que le théorème est vrai jusqu'à $p - 1$. Soient $x, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}^d$ fixés, avec $|\alpha_i| \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq p$. De manière formelle tout d'abord, si nous exprimons $y(t) = d_x^p \phi_t^v(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ à partir de l'équation (1.16) nous trouvons que $y(t)$ doit satisfaire l'équation :

$$y(t) = \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s y(s) ds + \int_0^t F_x^p(s) ds, \quad (1.18)$$

où

$$F_x^p(s) = \sum_{q=2}^p d_{\phi_s^v(x)}^q v_s(\alpha_1^q, \dots, \alpha_q^q) ds,$$

chaque α_k^q étant une combinaison linéaire de termes du type $d_x^m \phi_s^v(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})$ avec $m \leq p + 1 - q \leq p - 1$. On a de plus, si $F_x^{p-1}(s)$ est le terme correspondant dans l'équation de $d_x^{p-1} \phi_t^v(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, la relation suivante :

$$F_x^p(s) = d_x F_x^{p-1}(s) \alpha_p + d_{\phi_s^v(x)}^2 v_s(d_x \phi_s^v y(s), \alpha_p). \quad (1.19)$$

L'équation intégrale (1.18) est linéaire. Nous devons tout d'abord prouver qu'elle admet une solution unique, et nous allons pour cela utiliser le lemme 1, dont nous devons vérifier les hypothèses. Tout d'abord l'injection de V dans $C_0^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ assure que $\int_0^1 |d_{\phi_t^v(x)} v_t| dt \leq c_V \int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty$. Quant au deuxième terme de l'équation intégrale, il dépend des dérivées de ϕ_s^v jusqu'à l'ordre $p - 1$, et donc en utilisant la majoration (1.17) à l'ordre $p - 1$, on peut écrire

$$|\alpha_k^q| \leq r_k^q c_{p-1} \exp(c'_{p-1} \|v\|_{L_V^1}),$$

où r_k^q est une constante universelle. Ainsi

$$\left| \sum_{q=2}^p d_{\phi_s^v(x)}^q v_s(\alpha_1^q, \dots, \alpha_q^q) \right| \leq c_V \|v_s\|_V \sum_{q=2}^p |\alpha_1^q| \cdots |\alpha_q^q| \leq \tilde{c} \|v_s\|_V \exp(\tilde{c}' \|v\|_{L_V^1}),$$

pour de nouvelles constantes $\tilde{c}, \tilde{c}' > 0$. On voit donc que l'on peut appliquer le lemme 1 pour conclure à l'existence et l'unicité de la solution de (1.18). De plus,

$$|y(t)| \leq \tilde{c} \|v\|_{L_V^1} \exp(\tilde{c}' \|v\|_{L_V^1}) + c_V \int_0^t \|v_s\|_V |y(s)| ds,$$

soit encore, en appliquant le lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \tilde{c} \|v\|_{L_V^1} \exp(\tilde{c}' \|v\|_{L_V^1}) \exp\left(c_V \int_0^t \|v_s\|_V ds\right), \\ &\leq \tilde{c} \|v\|_{L_V^1} \exp((\tilde{c}' + c_V) \|v\|_{L_V^1}). \end{aligned}$$

On a ainsi la majoration voulue au rang p , à condition d'identifier $y(t)$ avec $d_x^p \phi_t^v(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. Pour cela, nous introduisons

$$z_\varepsilon(t) = y(t) - \frac{1}{\varepsilon} (d_{x+\varepsilon\alpha_p}^{p-1} \phi_t^v - d_x^{p-1} \phi_t^v) (\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}),$$

que nous développons à partir de l'équation intégrale 1.18 et de celles obtenues par l'hypothèse de récurrence à l'ordre $p-1$, pour obtenir une équation intégrale en $z_\varepsilon(t)$:

$$z_\varepsilon(t) = \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s z_\varepsilon(s) ds + \int_0^t F_x^p(s) ds \quad (1.20)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t F_{x+\varepsilon\alpha_p}^{p-1}(s) - F_x^{p-1}(s) ds \quad (1.21)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (d_{\phi_s^v(x+\varepsilon\alpha_p)} v_s - d_{\phi_s^v(x)} v_s) d_{x+\varepsilon\alpha_p}^{p-1} \phi_s^v(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) ds. \quad (1.22)$$

Tout d'abord $F_x^{p-1}(s)$ ne fait intervenir que des termes d'ordre au plus $p-1$ qui sont tous différentiables et uniformément bornés par hypothèse de récurrence. Donc par convergence dominée, le terme (1.21) tend vers $d_x F_x^{p-1}(s) \alpha_p$. Quant à la deuxième intégrale (1.22), elle converge vers $d_{\phi_s^v(x)}^2 v_s (d_x \phi_s^v \alpha_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$ pour les mêmes raisons (convergence simple et domination). Finalement, utilisant la relation (1.19) on obtient :

$$z_\varepsilon(t) = \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s z_\varepsilon(s) ds + h(\varepsilon),$$

où $h(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Le lemme de Gronwall nous donne alors la majoration $|z_\varepsilon(t)| \leq |h(\varepsilon)| \exp(c_V \|v\|_{L_V^1})$, d'où l'on conclue que $z_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. \square

Définition 4 Soit $p \geq 1$ un entier. L'espace $\mathcal{A}_{\text{id},0}^p$ est l'ensemble des difféomorphismes ϕ dans \mathbf{R}^d , de classe C^p , et tels que $\phi - \text{id}$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p sont nuls à l'infini. $\mathcal{A}_{\text{id},0}^p$ est un espace métrique complet pour la distance

$$d_p(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_{p,\infty} + \|\phi^{-1} - \psi^{-1}\|_{p,\infty}.$$

De même, l'espace $C([0,1], \mathcal{A}_{\text{id},0}^p)$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathcal{A}_{\text{id},0}^p$ est un espace complet pour la métrique $D_p(\phi, \psi) = \text{Sup}_{t \in [0,1]} d_p(\phi_t, \psi_t)$.

Proposition 8 Soit $p \geq 1$ et supposons que V s'injecte continûment dans $C_0^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$. Alors on a les résultats suivants :

1. L'application flot $\Phi : L_V^1 \rightarrow C([0,1], \mathcal{A}_{\text{id},0}^{p-1})$ est continue.
2. Si v^n converge vers v dans L_V^1 alors pour tout $t \in [0,1]$, $d^p \phi_t^{v^n}$ converge vers $d^p \phi_t^v$ uniformément sur tout compact.

3. Si v^n converge faiblement vers v dans L_V^2 alors pour tout $t \in [0, 1]$, $d^q \phi_t^{v^n}$ converge simplement vers $d^q \phi_t^v$ pour tout $q \leq p - 1$.

Preuve. On va raisonner par récurrence sur $p \geq 1$, le cas $p = 1$ correspondant à des résultats déjà démontrés (propositions 3, 5, 6 et théorème 4). Supposons donc le résultat vrai jusqu'à l'ordre p et montrons le pour $p + 1$.

Montrons tout d'abord que la continuité de Φ dans $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}, 0}^{p-1})$. Soit v^n , pour $n \geq 0$, et v des champs dans L_V^1 . Pour simplifier, on notera $\phi^{v^n} = \phi^n$ et $\phi^v = \phi$. L'équation intégrale pour la différentielle d'ordre $q = p$ s'écrit (cf. (1.18) et (1.12) pour $q = 1$) :

$$d^q \phi_t^n = d^q \text{id} + \int_0^t d_{\phi_s^n} v_s^n d^q \phi_s^n ds + \int_0^t F_x^{n,p}(s) ds, \quad (1.23)$$

où $F_x^{n,p}(s) = \sum_{l=2}^q d_{\phi_s^n}^l v_s^n (\alpha_{n1}^l, \dots, \alpha_{nl}^l) ds$, chaque α_{nk}^l étant une combinaison linéaire de termes du type $d^m \phi_s^n (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})$ avec $m \leq q + 1 - l \leq q - 1$. Supposons tout d'abord que (v^n) converge vers v dans L_V^1 , et montrons tout d'abord que $\int_0^t F_x^{n,p}(s) ds$ converge uniformément. D'après l'hypothèse de récurrence, tous les $d^m \phi_t^n$ convergent uniformément jusqu'à l'ordre $q - 1$, donc les α_{nk}^l convergent uniformément, et il en va de même pour $d_{\phi_s^n}^l v_s^n$: en effet on peut écrire

$$\begin{aligned} |d_{\phi_s^n}^l v_s^n - d_{\phi_s}^l v_s| &\leq |d_{\phi_s^n}^l v_s^n - d_{\phi_s}^l v_s^n| + |d_{\phi_s}^l (v_s^n - v_s)| \\ &\leq \|v_s^n\|_{l+1, \infty} \|\phi_s^n - \phi_s\|_{\infty} + \|v_s^n - v_s\|_{l, \infty}, \end{aligned}$$

ce qui tend vers 0. On en déduit aisément que $\int_0^t F_x^{n,p}(s) ds$ converge uniformément vers le terme correspondant dans l'équation de $d^q \phi_t$. A présent si l'on forme la différence $d^q \phi_t^n - d^q \phi_t$, on voit qu'elle satisfait l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} d^q \phi_t^n - d^q \phi_t &= \int_0^t d_{\phi_s^n} v_s^n \cdot (d^q \phi_s^n - d^q \phi_s) ds \\ &\quad + \int_0^t (d_{\phi_s^n} v_s^n - d_{\phi_s} v_s) \cdot d^q \phi_s ds + \int_0^t (F_x^{n,p}(s) - F_x^p(s)) ds. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ici la première intégrale est majorée par $c_V \|v_s^n\|_{L_V^2} \int_0^t |d^q \phi_s^n - d^q \phi_s| ds$, et la deuxième converge uniformément car $d_{\phi_s^n} v_s^n - d_{\phi_s} v_s$ tend uniformément vers 0 (vu plus haut), et $d^q \phi_s$ est uniformément borné. Par application du lemme de Gronwall à (1.24) on déduit de tout ceci la convergence uniforme de $d^q \phi_t^n$ vers $d^q \phi_t$. Il nous reste à montrer la décroissance à l'infini des dérivées d'ordre q , et nous suivons pour cela un raisonnement identique à celui de la proposition 5. Soit donc $v \in C([0, 1], V)$. Nous passons sur le fait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $A > 0$ tel que $|d_x^l v_t| < \varepsilon$ dès que $|x| > A$, $l \leq q$ et $t \in [0, 1]$, ce qui se démontre de manière strictement identique au cas $q = 0$. Maintenant soit $M > 0$ un majorant des $\|\phi_t - \text{id}\|_{p, \infty}$ pour $t \in [0, 1]$. En choisissant $|x| > A + M$ nous nous assurons que $|\phi_t^v(x)| > A$

pour tout temps t , puis à partir l'équation intégrale associée à $d_x^q \phi_t$ (1.18), nous obtenons la majoration $|d_x^q \phi_t| \leq \varepsilon \int_0^t |d_x^q \phi_s| ds + \varepsilon \tilde{M}$, pour une certaine constante \tilde{M} . Finalement le lemme de Gronwall nous permet de conclure, ce qui termine la preuve de la continuité de Φ dans $C([0, 1], \mathcal{A}_{\text{id}, 0}^{p-1})$.

A présent regardons ce qui se passe pour $q = p+1$. On constate que tout le raisonnement vu plus haut reste valable, mis-à-part la convergence de $d_{\phi_s^n}^{p+1} v_s^n$ car on ne peut pas écrire une majoration par $\|v_s^n\|_{p+2, \infty}$. En remplacement, on utilise le module de continuité de $d^q v_s^n$, qui tend bien vers 0 s'il est restreint à un compact fixé. Ainsi on obtient finalement une convergence uniforme sur tout compact.

Finalement examinons le cas de la convergence faible, et montrons d'abord que $d^q \phi^n$ converge simplement pour $q = p$. Tout d'abord notons que la convergence faible de (v^n) implique la convergence simple des dérivées $d^l v_t^n$ jusqu'à l'ordre $p+1$. De plus, une suite faiblement convergente étant bornée, tous les termes en jeu dans l'équation (1.23) restent uniformément bornés, et par conséquent le raisonnement inductif vu pour la convergence uniforme passe aussi ici pour la convergence simple. \square

Il est clair que le dernier résultat (convergence faible implique convergence simple) n'est en fait que partiel : en montrant l'équicontinuité des applications $(t, x) \mapsto d^q \phi_t^v(x)$ pour $q \leq p-1$ nous pouvons obtenir comme dans le cas $q = 0$ (cf. théorème 4) la continuité faible pour la convergence uniforme des $d^q \phi_t^v$. Nous allons prouver ce résultat seulement pour le cas $q = 1$, car nous nous en servons par la suite (au chapitre 5).

Proposition 9 *Si V s'injecte continûment dans $C_0^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ alors les applications $(t, x) \mapsto d\phi_t^v(x)$ sont équicontinues sur toute partie bornée de L_V^2 . Par conséquent si v^n converge faiblement vers v dans L_V^2 alors $d\phi_t^{v^n}$ converge vers $d\phi_t^v$ uniformément sur tout compact et vis-à-vis de t .*

Preuve. D'après l'équation intégrale vérifiée par la différentielle du flot (1.10), on peut écrire, pour $x, y \in \mathbf{R}^d$, $t \in [0, 1]$ et $v \in L_V^2$,

$$\begin{aligned} |d_x \phi_t^v - d_y \phi_t^v| &\leq \int_0^t |d_{\phi_s^v(x)} v_s d_x \phi_s^v - d_{\phi_s^v(y)} v_s d_y \phi_s^v| ds \\ &\leq \int_0^t (|d_{\phi_s^v(x)} v_s - d_{\phi_s^v(y)} v_s| |d_x \phi_s^v| + |d_{\phi_s^v(y)} v_s| |d_x \phi_s^v - d_y \phi_s^v|) ds \\ &\leq \int_0^t (\|v_s\|_{2, \infty} |\phi_s^v(x) - \phi_s^v(y)| \|d\phi_s^v\|_{\infty} + \|v_s\|_{1, \infty} \|d^2 \phi_s^v\|_{\infty} |x - y|) ds. \end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses d'injection et aux majorations (1.11) et (1.17), nous pouvons contrôler $\|v_s\|_{2, \infty}$, $\|d\phi_s^v\|_{\infty}$, $\|v_s\|_{1, \infty}$ et $\|d^2 \phi_s^v\|_{\infty}$ en fonction de $\|v\|_{L_V^2}$. Finalement nous concluons

en utilisant l'équicontinuité des applications $(t, x) \mapsto \phi_t^v(x)$ (proposition 7) pour majorer le terme $|\phi_s^v(x) - \phi_s^v(y)|$. Pour l'équicontinuité en temps, on écrit :

$$\begin{aligned} |d_x \phi_t^v - d_x \phi_s^v| &\leq \int_s^t |d_{\phi_r^v(x)} v_r \, d_x \phi_r^v| \, dr \\ &\leq c_1 e^{c'_1 \|v\|_{L_V^2}} \int_s^t \|v_r\|_{1,\infty} \, dr \\ &\leq c_1 e^{c'_1 \|v\|_{L_V^2}} c_V \int_s^t \|v_r\|_V \, dr \\ &\leq c_1 e^{c'_1 \|v\|_{L_V^2}} c_V \|v\|_{L_V^2} \sqrt{t-s}. \end{aligned}$$

Ceci montre l'équicontinuité vis-à-vis de x et t . Le résultat de continuité faible des $v \mapsto d\phi_t^v$ s'obtient alors de manière identique à e qui a été vu dans la preuve du théorème 4. \square

1.2 Groupe de déformations et géodésiques

1.2.1 Le groupe \mathcal{A}_V

On va considérer l'ensemble de tous les difféomorphismes obtenus à partir de champs $v \in L_V^1$. On définit donc $\mathcal{A}_V = \{\phi_t^v \mid v \in L_V^1, t \in [0, 1]\}$. Remarquons qu'il suffit en fait de considérer les flots au temps $t = 1$, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathcal{A}_V = \{\phi_1^v \mid v \in L_V^1\}.$$

En effet, il suffit de voir que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $v \in L_V^1$, $\phi_1^{\hat{v}} = \phi_t^v$ où \hat{v} est défini par $\hat{v}_s = v_s$ si $s \leq t$ et $\hat{v}_s = 0$ sinon.

Proposition 10 \mathcal{A}_V est un groupe et un espace complet pour la métrique

$$d_V(\text{id}, \phi) = \inf \left\{ \|v\|_{L_V^1} \mid v \in L_V^1, \phi_1^v = \phi \right\}$$

étendue par invariance à droite : $d_V(\phi, \psi) = d_V(\text{id}, \psi \circ \phi^{-1})$.

Preuve. La propriété de groupe se vérifie en remarquant que pour $u, v \in L_V^1$, $\phi_1^u \circ \phi_1^v = \phi_1^{u*v}$ où l'opération $u * v$ (concaténation) est définie par

$$(u * v)_t = \begin{cases} \frac{1}{2} u_{2t} & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} v_{2t-1} & \text{si } t > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

et que $(\phi_1^v)^{-1} = \phi_1^{\hat{v}}$ avec $\hat{v}_t = v_{1-t}$.

Montrons à présent que d_V est une distance sur \mathcal{A}_V :

- symétrie : en posant $\hat{v}_t = v_{1-t}$, on a $\phi_1^{\hat{v}} = (\phi_1^v)^{-1}$ et $\|\hat{v}\|_{L_V^1} = \|v\|_{L_V^1}$ ce qui prouve $d_V(\text{id}, \phi) = d_V(\text{id}, \phi^{-1})$. Donc $d_V(\phi, \psi) = d_V(\text{id}, \psi \circ \phi^{-1}) = d_V(\text{id}, \phi \circ \psi^{-1}) = d_V(\psi, \phi)$.
- inégalité triangulaire : soient $\phi, \psi, \varphi \in \mathcal{A}_V$; on peut écrire $\varphi = \phi_1^u \circ \phi$ et $\psi = \phi_1^v \circ \varphi$ avec $u, v \in L([0, 1], V)$. On a alors $d_V(\phi, \psi) \leq \|v * u\|_{L_V^1} = \|v\|_{L_V^1} + \|u\|_{L_V^1}$, et en passant à la borne inférieure sur les choix possibles de u et v , on obtient $d_V(\psi, \phi) \leq d_V(\psi, \varphi) + d_V(\varphi, \phi)$.
- $d_V(\phi, \phi) = d_V(\text{id}, \text{id}) = 0$ car $\text{id} = \phi_1^0$. Inversement, si $d_V(\phi, \psi) = 0$, il existe par définition de d_V une suite (v^n) tendant vers 0 dans L_V^1 et telle que $\phi_1^{v^n} = \psi \circ \phi^{-1}$. Alors par continuité de Φ , il vient $\psi \circ \phi^{-1} = \text{id}$.

Passons à la complétude : soit (ϕ_n) une suite de Cauchy dans (\mathcal{A}_V, d_V) (avec $\phi_0 = \text{id}$). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\sum_{n \geq 0} d_V(\phi_n, \phi_{n+1}) < \infty$. Puis on peut choisir une suite (u^n) dans L_V^1 vérifiant $\phi_1^{u^n} = \phi_{n+1} \circ (\phi_n)^{-1}$ et $\sum_{n \geq 0} \|u^n\|_{L_V^1} < \infty$. On définit alors v^n par $v_t^n = u_{2^{k+1}t-2^k}$ si $1 - 2^{-k} \leq t \leq 1 - 2^{-k-1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$, et $v_t = 0$ si $1 - 2^{-n} \leq t \leq 1$. Alors on vérifie facilement que $\phi_n = \phi_1^{v^n}$ et que $\|v_{n+1} - v_n\|_{L_V^1} = \|u_n\|_{L_V^1}$. Ainsi $\sum_{n \geq 0} \|v_{n+1} - v_n\|_{L_V^1} = \sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{L_V^1} < \infty$ et (v_n) est une suite de Cauchy dans L_V^1 , donc convergente. Notons v sa limite, et $\phi = \phi_1^v$. Il reste à montrer que $d_V(\phi, \phi_n)$ tend vers 0. Or pour $p \geq n$, $\phi_p = \phi_1^{v^p - v^n} \circ \phi_n$, et par continuité de Φ , il vient $\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_1^{v^p - v^n} \circ \phi_n = \phi_1^{v - v^n} \circ \phi_n = \phi$, et donc $d_V(\phi, \phi_n) \leq \|v - v^n\|_{L_V^1}$ ce qui tend vers 0. \square

A présent nous allons voir que nous pouvons aussi paramétrer le groupe \mathcal{A}_V par l'espace de Hilbert L_V^2 , et construire la distance d_V par la norme L_V^2 . Nous avons pour cela besoin du résultat suivant :

Lemme 6 *Pour tout $v \in L_V^1$, il existe $u \in L_V^2$ tel que $\phi_1^u = \phi_1^v$ et $\|u\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1}$.*

Preuve. Soit α une application intégrable de $[0, 1]$ dans $]0, +\infty[$, intégrable, de masse 1, et $A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$. Si l'on pose, pour tout $s \in [0, 1]$, $u_s = \alpha(s)v_{A(s)}$, on définit un nouvel élément de L_V^1 . En effet,

$$\|u\|_{L_V^1} = \int_0^1 \alpha(s) \|v_{A(s)}\|_V ds = \int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty,$$

en effectuant le changement de variable $t = A(s)$. De plus $\phi_1^u = \phi_1^v$. En effet,

$$\begin{aligned} \phi_{A(t)}^v(x) &= x + \int_0^{A(t)} \alpha(s) v_s \circ \phi_s^v(x) ds \\ &= x + \int_0^t \alpha(r) v_{A(r)} \circ \phi_{A(r)}^v(x) dr, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation intégrale de $\phi_t^u(x)$ coïncide avec celle de $\phi_{A(t)}^v(x)$. Par unicité nous en déduisons que $\phi_t^u(x) = \phi_{A(t)}^v(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$, et en particulier $\phi_1^u(x) = \phi_1^v(x)$.

A présent soit $\varepsilon > 0$ et montrons qu'en choisissant α de façon appropriée, nous pouvons obtenir $\|u\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1} + \varepsilon$. Écrivons :

$$\|u\|_{L_V^2}^2 = \int_0^1 \alpha(s)^2 \|v_{A(s)}\|_V^2 ds = \int_0^1 \alpha(A^{-1}(t)) \|v_t\|_V^2 dt.$$

Soit alors $\eta > 0$ et, pour $t \in [0, 1]$, $\beta(t) = \frac{1}{C}(\eta + \|v_t\|_V)$, avec $C = \eta + \|v\|_{L_V^1}$, puis $B(t) = \int_0^t \beta(s) ds$. L'application B est strictement croissante, avec $B(0) = 0$ et $B(1) = 1$; elle définit donc une bijection, et l'on peut choisir α tel que $A = B^{-1}$. On a alors $\alpha \circ A^{-1} = 1/\beta$, et donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_V^2}^2 &= \int_0^1 \frac{1}{\beta(t)} \|v_t\|_V^2 dt = C \int_0^1 \frac{\|v_t\|_V^2}{\eta + \|v_t\|_V} dt \\ &\leq C \|v\|_{L_V^1} = (\eta + \|v\|_{L_V^1}) \|v\|_{L_V^1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\|u\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1} \sqrt{1 + \eta/\|v\|_{L_V^1}} \leq \|v\|_{L_V^1} + \eta/2$, et donc en choisissant $\eta < 2\varepsilon$, nous obtenons la majoration voulue.

Sur la base de ce résultat, nous pouvons alors considérer une suite (u^n) dans L_V^2 telle que $\phi_1^{u^n} = \phi_1^v$ et $\|u^n\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1} + \frac{1}{n}$. Une telle suite étant bornée, nous pouvons supposer sans restriction qu'elle converge faiblement vers un certain $u \in L_V^2$. Alors d'après le théorème 4, les flots $\phi_1^{u^n}$ convergent vers ϕ_1^u , et donc $\phi_1^u = \phi_1^v$. De plus $\|u\|_{L_V^2} \leq \liminf \|u^n\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1}$. \square

A présent nous pouvons énoncer

Proposition 11

$$\mathcal{A}_V = \{\phi_1^v \mid v \in L_V^2\},$$

et pour tout $\phi \in \mathcal{A}_V$,

$$d_V(\text{id}, \phi) = \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid v \in L_V^2, \phi_1^v = \phi \right\}.$$

Preuve. La première assertion est claire d'après le lemme 6, en utilisant simplement le fait que pour tout $v \in L_V^1$, il existe $u \in L_V^2$ tel que $\phi_1^u = \phi_1^v$. En ce qui concerne la distance d_V , notons $\delta(\text{id}, \phi) = \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2} \mid v \in L_V^2, \phi_1^v = \phi \right\}$. De façon immédiate nous avons $d_V(\text{id}, \phi) \leq \delta(\text{id}, \phi)$, puisque $L_V^2 \subset L_V^1$ et $\|\cdot\|_{L_V^1} \leq \|\cdot\|_{L_V^2}$, et l'inégalité inverse est une conséquence directe du lemme 6, en passant aux bornes inférieures. \square

1.2.2 Existence des géodésiques

Théorème 6 *Pour tous $\phi, \psi \in \mathcal{A}_V$ il existe $v \in L_V^2$ tel que $\phi_1^v = \psi \circ \phi^{-1}$ et $d(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2} = \|v\|_{L_V^1}$. En fait pour un tel champ v , la norme $\|v_t\|_V$ est constante pour presque tout t .*

Preuve. Soit (v^n) une suite dans L_V , minimisante au sens où $\phi_1^{v^n} = \psi \circ \phi^{-1}$ et $\|v^n\|_{L_V^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d_V(\phi, \psi)$. Alors (v^n) est bornée et donc sans restriction on peut supposer qu'elle converge faiblement. Notons v sa limite. Du théorème de continuité faible du flot 4, nous déduisons que $\phi_1^v = \psi \circ \phi^{-1}$. De plus $\|v\|_{L_V^2} \leq \liminf \|v^n\|_{L_V^2} = d_V(\phi, \psi)$. Enfin, par définition de d_V , $\|v\|_{L_V^1} \geq d_V(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2}$, et donc $\|v\|_{L_V^1} = \|v\|_{L_V^2}$. Finalement, cette égalité correspondant au cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, elle implique que $\|v_t\|_V$ est constante pp. \square

1.3 Problème d'appariement

En termes très vagues, un problème d'appariement consiste, à partir de deux "objets" O_1 et O_2 (points, images, courbes,...), à déterminer le difféomorphisme optimal ϕ tel que le "transport" du premier objet soit "le plus proche possible" du second.

Plus précisément, selon notre optique, la modélisation d'une fonctionnelle doit suivre le schéma général suivant :

1. Définir un espace mathématique approprié E contenant les objets d'étude.
2. Définir une action $(\phi, O) \mapsto \phi.O$ du groupe des difféomorphismes \mathcal{A}_V sur l'espace E .
3. Définir une distance d_E sur l'espace E afin de mesurer l'appariement entre les objets.

Une fois un tel cadre fixé, le terme d'attache aux données est alors défini par

$$A(\phi_1^v) = d_E(\phi_1^v.O_1, O_2).$$

Définition 5 *Soit $A : \mathcal{A}_V \rightarrow [0, +\infty[$ une fonctionnelle (appelée attache aux données), et $\lambda > 0$ fixé. Le problème d'appariement pour A consiste à minimiser sur \mathcal{A}_V*

$$J(\phi) = \lambda d_V(\text{id}, \phi) + A(\phi).$$

De manière équivalente, il s'agit de minimiser sur L_V^2 la fonctionnelle

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + A(\phi_1^v). \quad (1.25)$$

L'équivalence entre les deux formulations provient du théorème d'existence des géodésiques sur \mathcal{A}_V 6.

Théorème 7 Soit $A : \mathcal{A}_V \rightarrow [0, +\infty[$ une fonctionnelle telle que $v \mapsto A(\phi_1^v)$ soit faiblement continue de L_V^2 dans \mathbf{R} . Alors il existe toujours, pour $\lambda > 0$, un minimum (dans L_V^2 ou dans \mathcal{A}_V) pour le problème d'appariement correspondant à A .

D'après le théorème 4, il suffit donc, pour que le résultat tienne, de montrer la continuité de A pour la convergence uniforme sur tout compact.

Preuve. D'après le théorème 4, si v^n converge faiblement vers v dans L_V^2 , alors $\phi_1^{v^n}$ converge vers ϕ_1^v uniformément sur tout compact, et donc $A(\phi_1^{v^n})$ converge vers $A(\phi_1^v)$. Ainsi $v \mapsto A(\phi_1^v)$ est bien faiblement continue. Ensuite, considérons une suite minimisante (v^n) dans L_V^1 . Cette suite est bornée puisque $\|v^n\|_{L_V^1} \leq J(v^n)$ qui est borné. Quitte à extraire une sous-suite on peut donc considérer que (v^n) est une suite minimisante faiblement convergente vers v . Grâce à la faible continuité de $v \mapsto A(\phi_1^v)$, on en déduit que $A(\phi_1^{v^n})$ converge vers $A(\phi_1^v)$. D'autre part la convergence faible de (v^n) assure que $\underline{\lim} \|v^n\|_{L_V^1} \geq \|v\|_{L_V^1}$. Ainsi $J(v) \leq \underline{\lim} J(v^n) = \inf J$ et donc $J(v) = \inf J$. \square

1.4 Adjonction des déformations rigides dans le modèle

L'espace V des champs de vecteurs, tel que nous l'avons construit, ne permet pas de modéliser les déformations rigides de l'espace (translations, rotations et éventuellement dilatations), ceci à cause de l'hypothèse de nullité à l'infini. Dans d'autres situations, comme le cas de la géométrie sphérique - que nous étudierons au chapitre 3 - il peut être possible de les générer, mais de toutes manières il n'est pas souhaitable d'évaluer le coût de ces déformations par la norme L_V^2 .

Nous voyons ici comment construire un modèle qui traite de façon indépendante déformations élastiques et rigides, afin de pouvoir contrôler le coût, éventuellement nul, attribué à ces dernières.

1.4.1 Champs générant les déformations rigides

Le groupe euclidien $E(d)$ est l'ensemble des isométries directes de \mathbf{R}^d . C'est un produit semi-direct du groupe des rotations $SO(d)$ et du groupe des translations. Ces isométries peuvent être considérées en tant que flots de champs de vecteurs dépendant du temps. L'espace vectoriel $\mathcal{E}(d)$ des champs de vecteurs générant ces déformations est de dimension finie égale à $d(d+1)/2$. Il est engendré par les champs constants et les champs $x \mapsto ax$ où a est une matrice antisymétrique. Pour $d = 2$ par exemple, $\mathcal{E}(2) = \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1(x_1, x_2) = (1, 0)$, $e_2(x_1, x_2) = (0, 1)$ et $e_3(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. L'espace $\mathcal{E}(d)$ peut être muni d'une structure euclidienne naturelle en posant, pour tout $e = a + \tau \in \mathcal{E}(d)$, $|e|^2 = |a|^2 + |\tau|^2$. Nous pouvons alors considérer, comme nous l'avons fait pour l'espace V ,

des champs dépendant du temps appartenant à l'espace de Hilbert $L^2([0, 1], \mathcal{E})$, et définir leurs flots.

Proposition 12 *Pour tout $e \in L^2([0, 1], \mathcal{E}(d))$, il existe une solution unique $E^e \in C([0, 1], E(d))$ à l'équation de flot*

$$E_t^e x = x + \int_0^t e_s E_s^e x ds.$$

A présent nous formons l'espace de Hilbert $V \times \mathcal{E}(d)$. Nous noterons $\pi_V : V \times \mathcal{E}(d) \rightarrow V$ et $\pi_{\mathcal{E}} : V \times \mathcal{E}(d) \rightarrow \mathcal{E}(d)$ les projections canoniques associées. Nous introduisons aussi l'espace de Hilbert $L^2([0, 1], V \times \mathcal{E}(d))$ (aussi identifié à $L^2([0, 1], V) \times L^2([0, 1], \mathcal{E}(d))$).

Proposition 13 *Pour tous champs w_t s'écrivant sous la forme $w_t = v_t + e_t$ avec $(v, e) \in L^2([0, 1], V \times \mathcal{E}(d))$, il existe une solution unique $\phi^w \in C([0, 1], \mathcal{A})$ à l'équation de flot*

$$\phi_t^w(x) = x + \int_0^t w_s \circ \phi_s^w(x) ds.$$

Cette solution satisfait $\phi_t^w = E_t^e \phi_t^u$ avec $u_t = (dE_t^e)^{-1} v_t \circ E_t^e$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_t(E_t^e \phi_t^u) &= \partial_t E_t^e \phi_t^u + dE_t^e \partial_t \phi_t^u \\ &= e_t E_t^e \phi_t^u + dE_t^e u_t \circ \phi_t^u \\ &= e_t E_t^e \phi_t^u + dE_t^e u_t (E_t^e)^{-1} E_t^e \circ \phi_t^u \\ &= (e_t + v_t) E_t^e \phi_t^u. \end{aligned}$$

Ainsi $E_t^e \phi_t^u$ et ϕ_t^w satisfont la même équation intégrale et sont donc égaux par unicité. \square

1.4.2 Problème d'appariement incluant les déformations rigides

Proposition 14 *Supposons que V est invariant par translations et rotations, c'est-à-dire que pour tout $E \in E(d)$ la transformation $v \mapsto (dE)^{-1} v \circ E$ est une isométrie de V . Soit $A : \mathcal{A}_V \rightarrow [0, +\infty[$ une fonctionnelle telle que $v \mapsto A(\phi_1^v)$ soit faiblement continue sur L_V^2 . Alors les deux problèmes suivants sont équivalents :*

1. Minimiser J sur l'espace $L^2([0, 1], V \times \mathcal{E}(d))$, où

$$J(v, e) = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + A(\phi_1^{v+e}),$$

2. Minimiser \tilde{J} sur l'espace $L^2([0, 1], V) \times E(d)$, où

$$\tilde{J}(u, E) = \int_0^1 \|u_t\|_V^2 dt + A(E\phi_1^u).$$

Preuve. Soit $(v, e) \in L^2([0, 1], V \times \mathcal{E}(d))$. D'après la proposition 13, en posant $u_t = (dE_t^e)^{-1}v_t \circ E_t^e$ et $E = E_1^e$, on obtient $\phi_1^w = E\phi_1^u$ et donc $A(\phi_1^w) = A(E\phi_1^u)$. De plus la propriété d'invariance de V assure que $\|v_t\|_V = \|u_t\|_V$. Ainsi $J(v, e) = \tilde{J}(u, E)$. Réciproquement, soit $(u, E) \in L^2([0, 1], V) \times E(d)$. L'espace $E(d)$ est connexe, et l'on peut construire facilement une application régulière $t \mapsto e_t$ à valeurs dans $\mathcal{E}(d)$ et telle que $E_1^e = E$. En posant alors

$$v_t = \begin{cases} 2u_{2t} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad e_t = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2e_{2t-1} & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

on vérifie immédiatement que $\phi_1^w = E\phi_1^u$ puis que $J(w) = \tilde{J}(u, E)$. \square

Chapitre 2

Méthodes à noyaux pour les problèmes d'appariement

La première partie de ce chapitre expose les résultats mathématiques fondamentaux sur les noyaux reproduisants. Le premier objectif est de proposer une méthode théorique pour la modélisation de l'espace V de champs de vecteurs introduit au chapitre 1, à partir duquel sont construits les difféomorphismes. Dans cette optique, nous examinons le lien entre régularité du noyau et régularité de l'espace, afin de déterminer sous quelles conditions le critère d'admissibilité (1.1) est satisfait. Puis nous étudions les conditions d'invariance vis-à-vis des isométries de l'espace. Au final, les résultats connus sur les fonctions de type positif fournissent des critères explicites de sélection du noyau.

En fait tous les algorithmes d'appariement que nous verrons par la suite seront directement exprimés en fonction du noyau de l'espace V , précisément parce qu'une fois les objets d'étude discrétisés, on est toujours amené à examiner le mouvement d'un nombre fini de points dans l'espace, mouvement qui peut être décrit par des combinaisons de champs splines. Ce principe, que nous appelons principe de réduction, est formalisé en deuxième partie. Nous terminons en introduisant l'exemple générique, celui de l'appariement de points caractéristiques.

2.1 Espaces de Hilbert à noyaux reproduisants

Nous présentons ici les principaux résultats de la théorie des espaces de Hilbert à noyaux reproduisants, en les étendant au cas de fonctions à valeurs vectorielles. Dans le cas scalaire, les références principales sont les articles d'Aronszajn [4, 5]. Par ailleurs, Laurent Schwartz a développé une version abstraite de la théorie, avec la notion de sous-espace hilbertien [46]. Nous renvoyons aussi aux ouvrages suivants : [56, 43].

2.1.1 Espaces de Hilbert, représentation de Riesz

Soit H un espace de Hilbert. Nous noterons

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ son produit scalaire et $\| \cdot \|_H$ sa norme,
2. H' l'espace dual, de norme $\| \cdot \|_{H'}$ et de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'}$. L'action d'une forme linéaire $\eta \in H'$ sur un élément $h \in H$ sera notée à l'aide du crochet de dualité $\langle \eta | h \rangle$.

Le théorème de représentation de Riesz établit l'existence d'une isométrie, notée ici K_H , entre H' et H vérifiant pour tous $\eta \in H'$ et $h \in H$,

$$\langle \eta | h \rangle = \langle K_H \eta, h \rangle_H. \quad (2.1)$$

2.1.2 Espaces reproduisants et noyaux

Espaces reproduisants

Définition 6 Soit $(H, \| \cdot \|_H)$ un espace de Hilbert formé de fonctions sur un ensemble S , à valeurs dans \mathbf{R}^m . H est dit **espace à noyau reproduisant** ou **RKHS** (pour Reproducing Kernel Hilbert Space) si les fonctionnelles d'évaluation $\delta_x : f \mapsto f(x)$ sont continues pour tout $x \in S$.

Remarque 2 Afin de travailler avec des formes linéaires, nous utiliserons plutôt lorsque $m \geq 2$ les fonctionnelles $\delta_x^\alpha : f \mapsto f(x) \cdot \alpha$, pour $x \in S$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$. L'espace de Hilbert H est donc un RKHS si et seulement si toutes ces fonctionnelles appartiennent au dual H' .

En termes plus abstraits, un espace reproduisant est donc un sous-ensemble $H \subset (\mathbf{R}^m)^S$ muni d'une structure d'espace de Hilbert, et tel que l'injection $H \rightarrow (\mathbf{R}^m)^S$ est continue pour la topologie de la convergence simple. La généralisation immédiate de cette définition conduit à la notion de sous-espace hilbertien d'un espace vectoriel topologique; voir pour cela [46]. Retenons que si H est un espace reproduisant, la convergence dans H d'une suite de fonctions implique leur convergence ponctuelle.

Définition 7 Soit H un RKHS. Le **noyau reproduisant** de H est l'application $k_H : S^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ telle que pour chaque $x \in S$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$,

$$k_H(x, \cdot) \alpha = K_H \delta_x^\alpha, \quad (2.2)$$

c'est-à-dire que $k_H(x, \cdot) \alpha$ est l'unique élément de H vérifiant : pour tout $h \in H$,

$$h(x) \cdot \alpha = \delta_x^\alpha(h) = \langle k_H(x, \cdot) \alpha, h \rangle_H. \quad (2.3)$$

Nous appellerons les fonctions $k(x, \cdot)\alpha$ fonctions fondamentales, ou champs splines dans le cas où H est un espace de champs de vecteurs ($m = d$).

En appliquant (2.3) avec une fonction h elle-même égale à une autre fonction fondamentale $k(y, \cdot)\beta$, on obtient la propriété suivante, qui justifie le terme de noyau reproduisant :

Proposition 15 *Soit H un RKHS. Pour tous $x, y \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$,*

$$\langle k_H(x, \cdot)\alpha, k_H(y, \cdot)\beta \rangle_H = \beta \cdot k_H(x, y)\alpha. \quad (2.4)$$

Noyaux vectoriels positifs

Les fonctions ou noyaux de type positif ont fait l'objet d'études bien avant que soit développée la théorie des espaces reproduisants, car ils interviennent dans de nombreuses branches de mathématiques. Nous donnons ici la définition dans le cadre vectoriel qui nous occupe, et nous reviendrons par la suite sur les théorèmes de caractérisation des noyaux invariants (section 2.1.4).

Définition 8 *On appelle noyau vectoriel positif de dimension m sur S toute application $k : S^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ vérifiant : pour tous $x, y \in S$, $k(y, x) = k(x, y)^*$, et pour tous $x^1, \dots, x^n \in S$ et $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbf{R}^m$,*

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha^j \cdot k(x^i, x^j)\alpha^i \geq 0. \quad (2.5)$$

Si de plus lorsque les x^i sont distincts l'expression ci-dessus est nulle seulement si les α^i sont tous nuls, alors le noyau k est dit strictement positif.

En d'autres termes, la condition de positivité est que la matrice bloc de taille $m * n$ formée des matrices des $k(x^i, x^j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$ soit symétrique positive. Ceci nous amène à l'extension de notation suivante :

Définition 9 *Soit k un noyau vectoriel de dimension m sur \mathbf{R}^d . Pour tout $n \geq 0$ et tous points $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ et $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ dans $(\mathbf{R}^d)^n$, on note $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ l'opérateur de $\mathcal{L}((\mathbf{R}^d)^n)$ tel que pour tout $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in (\mathbf{R}^m)^n$, $\boldsymbol{\beta} = k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}$ est l'élément de $(\mathbf{R}^m)^n$ dont la i^e composante est donnée par*

$$\beta^j = \sum_{i=1}^n k(x^i, x^j)\alpha^i.$$

Lorsque $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, on notera parfois simplement $k(\mathbf{x})$ cet opérateur.

Dans la suite nous utiliserons souvent ces notations afin de simplifier les écritures. Pour un élément $\mathbf{x} \in (\mathbf{R}^d)^n$ et un champ $v \in V$, on notera aussi parfois $v(\mathbf{x}) = (v(x^1), \dots, v(x^n)) \in (\mathbf{R}^d)^n$ et $\phi_t^v(\mathbf{x}) = (\phi_t^v(x^1), \dots, \phi_t^v(x^n))$.

Proposition 16 *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) k est un noyau positif sur \mathbf{R}^d .
- ii) Pour tout $n \geq 0$ et tout $\mathbf{x} \in (\mathbf{R}^d)^n$, $k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est un opérateur symétrique positif.
- iii) Pour tout $n \geq 0$, le noyau vectoriel k est positif sur $(\mathbf{R}^d)^n$.

L'équivalence entre i) et ii) découle directement de la remarque faite précédemment. Pour le iii), il suffit de remarquer que la condition de positivité (2.5) exprimée pour p points sur $(\mathbf{R}^d)^n$ équivaut à la condition de positivité pour $p * n$ points sur \mathbf{R}^d .

Théorème fondamental

Théorème 8 *Les noyaux vectoriels positifs de dimension m sur S sont exactement les noyaux reproduisants des RKHS de fonctions définies sur S et à valeurs dans \mathbf{R}^m . Plus précisément,*

- i) *Le noyau reproduisant d'un RKHS est un noyau positif.*
- ii) *A tout noyau positif k sur S de dimension m , il correspond un **unique** RKHS sur S , à valeurs dans \mathbf{R}^m , dont k est le noyau reproduisant.*

Preuve.

i) Si H est un RKHS, alors d'après la propriété reproduisante (2.4), pour tous $x^1, \dots, x^n \in S$ et $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbf{R}^m$,

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha^j \cdot k_H(x^i, x^j) \alpha^i = \left\| \sum_{i=1}^n k_H(x^i, \cdot) \alpha^i \right\|_H^2 \geq 0,$$

donc k_H est un noyau positif.

ii) On considère l'espace $H_0 = \text{Vect}(k(x, \cdot)\alpha, x \in S, \alpha \in \mathbf{R}^m)$, c'est-à-dire l'espace des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^n k(x^i, x) \alpha^i.$$

Notons que l'on supposera toujours les x^i distincts dans une telle écriture. On définit l'opération $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$ en partant de la relation

$$\langle k(x, \cdot)\alpha, k(y, \cdot)\beta \rangle_{H_0} = \beta \cdot k(x, y) \alpha \quad \text{pour tous } x, y \in S \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbf{R}^m,$$

que l'on étend ensuite par bilinéarité à H_0 . Cette forme est définie de manière unique : pour le montrer il suffit de voir que si une combinaison $f = \sum_{i=1}^n k(x^i, \cdot)\alpha^i$ est identiquement nulle, alors $\langle f, g \rangle_{H_0} = 0$ pour tout $g \in H_0$. C'est le cas puisque pour tous y et β , $\langle k(y, \cdot)\beta, \sum_{i=1}^n k(x^i, \cdot)\alpha^i \rangle_{H_0} = \beta \cdot (\sum_{i=1}^n k(x^i, y)\alpha^i) = 0$. La positivité du noyau implique alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est symétrique et positive. Pour voir qu'il s'agit d'un produit scalaire, remarquons que l'on a, pour tous $f \in H_0$, $x \in S$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$, $\alpha \cdot f(x) = \langle k(x, \cdot), f \rangle_{H_0}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient $|f(x)| \leq \langle k(x, \cdot)\alpha, k(x, \cdot)\alpha \rangle_{H_0} \langle f, f \rangle_{H_0}$. Par conséquent nous obtenons bien la propriété : $\langle f, f \rangle_{H_0} = 0$ implique f identiquement nulle. L'espace H_0 est donc un espace préhilbertien. A présent soit (f_n) une suite dans H_0 . Pour $x \in S$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$ et $p, q \in \mathbf{N}$, on peut écrire :

$$|(f_p(x) - f_q(x)) \cdot \alpha| = |\langle f_p - f_q, k(x, \cdot)\alpha \rangle_{H_0}| \leq \|f_p - f_q\|_{H_0} \sqrt{\alpha \cdot k(x, x)\alpha},$$

et donc $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_{H_0} \sqrt{|k(x, x)|}$. Par conséquent, si (f_n) est une suite de Cauchy dans H_0 , elle converge simplement vers une fonction f . On peut alors réaliser la complétion de H_0 en tant qu'espace fonctionnel comme suit. Soit H l'ensemble des limites simples des suites de Cauchy de H_0 . Si (f_n) est une suite de Cauchy dans H_0 et f sa limite simple, alors on pose : $f = \lim f_n$ dans H , et $\|f\|_H = \lim \|f_n\|_{H_0}$. Cependant, il faut ici faire attention à ce que deux suites de Cauchy différentes (au sens où la différence tend vers 0) n'aient pas la même limite simple. Autrement dit, il faut vérifier : si (f_n) est de Cauchy dans H_0 et converge en tout point vers 0, alors $\lim f_n = 0$ dans H_0 . Pour cela notons d'abord que (f_n) converge faiblement vers 0 dans H_0 , puisque les produits scalaires dans H_0 correspondent à des combinaisons linéaires d'évaluations ponctuelles. Ensuite pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe d'après la propriété de Cauchy, un entier p tel que pour tout $n \geq p$,

$$\|f_n\|_{H_0}^2 - 2\langle f_p, f_n \rangle_{H_0} \leq \|f_n - f_p\|_{H_0}^2 \leq \varepsilon.$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_p, f_n \rangle_{H_0} = 0$ par convergence faible, et par conséquent $\|f_n\|_{H_0}^2 \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand. Ainsi (f_n) converge vers 0 dans H_0 .

L'espace de Hilbert H ainsi constitué est bien un RKHS de noyau k , puisque pour tout $x \in S$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$, $\delta_x^\alpha(f) = \alpha \cdot f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot f_n(x)$ par convergence simple, puis $\delta_x^\alpha(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle k(x, \cdot)\alpha, f_n \rangle_{H_0} = \langle k(x, \cdot)\alpha, f \rangle_H$ par convergence dans H .

Montrons à présent l'unicité de H . Soit \tilde{H} un autre RKHS de noyau k . \tilde{H} doit contenir tous les $k(x, \cdot)\alpha$, et donc contenir H_0 . De plus, les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ coïncident sur H_0 . Enfin une suite de Cauchy dans H_0 a même limite dans H et dans \tilde{H} puisque cette limite converge aussi au sens de la convergence simple. Ainsi H est un sous-espace fermé de \tilde{H} . A présent si f est un élément de \tilde{H} orthogonal à H , on a pour tous x et α , $f(x) \cdot \alpha = \langle f, k(x, \cdot)\alpha \rangle_H = 0$, donc $f = 0$. Ainsi $H = \tilde{H}$. \square

Remarquons que n'importe quel espace de Hilbert H peut être vu comme espace reproduisant de fonctions définies sur un certain ensemble. En effet, si X est une partie complète

de H (c'est-à-dire $\text{Vect } X$ est dense), on pose pour $h \in H$, et $x \in X$, $h(x) = \langle h, x \rangle_H$. il est clair que H est alors un espace reproduisant de fonctions scalaires sur X , de noyau $k_H(x, y) = \langle x, y \rangle_H$.

Quelques propriétés importantes

Soit H un espace reproduisant. Notons tout d'abord la suite d'identités suivante, qui est juste une manipulation des définitions, mais sera souvent utilisée par la suite : pour toute forme linéaire $\mu \in H'$, $x \in S$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$,

$$K_H \mu(x) \cdot \alpha = \langle \delta_x^\alpha | K_H \mu \rangle = \langle K_H \delta_x^\alpha, K_H \mu \rangle_H = \langle \mu | K_H \delta_x^\alpha \rangle = \langle \mu | k_H(x, \cdot) \alpha \rangle.$$

Proposition 17 (Expression du noyau) *Soit H un espace reproduisant séparable et $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base orthonormée de H . Alors pour tous $x, y \in S$,*

$$k_H(x, y) \alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \alpha \cdot e_n(x) e_n(y).$$

Preuve. $k_H(x, \cdot) \alpha$ est la limite dans H de $\sum_{n=0}^N \langle k_H(x, \cdot) \alpha, e_n \rangle_H e_n$, et donc aussi limite simple en tout $y \in S$. Ainsi,

$$k_H(x, y) \alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle k_H(x, \cdot) \alpha, e_n \rangle_H e_n(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \alpha \cdot e_n(x) e_n(y).$$

□

Lemme 7 *Soit H un espace reproduisant, et (f_n) une suite bornée dans H convergeant simplement vers une fonction f . Alors $f \in H$ et (f_n) converge faiblement vers f dans H .*

Preuve. Puisque (f_n) est bornée dans l'espace de Hilbert H , il suffit de voir que toute limite faible \tilde{f} d'une sous-suite (f_{φ_n}) est égale à f . Or pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$f(x) \cdot \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varphi_n}(x) \cdot \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_{\varphi_n}, k(x, \cdot) \alpha \rangle_H = \langle \tilde{f}, k(x, \cdot) \alpha \rangle_H = \tilde{f}(x) \cdot \alpha.$$

□

2.1.3 Résultats de régularité

Nous nous plaçons à présent dans le cas d'espaces de fonctions définies sur $S = \mathbf{R}^d$, et nous allons voir comment les propriétés de régularité du noyau peuvent se transmettre à l'espace de Hilbert qu'il engendre. Pour le cas scalaire, des résultats analogues, mais démontrés dans un cadre beaucoup plus abstrait, peuvent être trouvés dans l'article de Laurent Schwartz [46].

Proposition 18 Soit k un noyau vectoriel positif de dimension m , continu et borné sur \mathbf{R}^d , et tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $k(x, \cdot)$ est nul à l'infini. Alors l'espace reproduisant de k s'injecte continûment dans $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$.

Preuve. Par hypothèse, les fonctions $k(x, \cdot)\alpha$ appartiennent toutes à $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$. Donc l'espace H_0 qu'elles engendrent est inclus dans $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$. D'autre part, par définition du noyau reproduisant, on a pour tous $f \in H_0$ et $x \in \mathbf{R}^d$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$, $f(x) \cdot \alpha = \langle k_H(x, \cdot)\alpha, f \rangle_H$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient $|f(x) \cdot \alpha| \leq \|k(x, \cdot)\alpha\|_H \|f\|_H = \sqrt{\alpha \cdot k(x, x)\alpha} \|f\|_H$, et donc $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \sqrt{|k(x, x)|} \|f\|_H$. Par conséquent les suites de Cauchy dans H_0 convergent au sens de la norme uniforme, et donc les éléments de H (limites simples des suites de Cauchy) appartiennent à $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ et vérifient $\|f\|_\infty \leq \sqrt{\|k\|_\infty} \|f\|_H$. Ainsi H s'injecte continûment dans $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$. \square

Théorème 9 Soit $p \geq 0$ un entier et k est un noyau positif admettant des dérivées continues et bornées sur \mathbf{R}^d jusqu'à l'ordre $2p$. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $k(x, \cdot)$ est nul à l'infini ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p . Alors l'espace reproduisant correspondant s'injecte continûment dans $C_0^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$. De plus, pour tous $1 \leq q \leq p$, $x, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^q \in \mathbf{R}^d$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$, la fonction $\partial_1^q(k(x, \cdot)\alpha)(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^q)$ appartient à H et satisfait

$$\alpha \cdot d_x^q f(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^q) = \langle f, \partial_1^q(k(x, \cdot)\alpha)(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^q) \rangle_H. \quad (2.6)$$

Preuve. Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur $p \geq 0$, le cas $p = 0$ étant acquis grâce à la proposition 18. Supposons donc le théorème vrai jusqu'à l'ordre $p - 1$. Le but est de montrer que pour tout $f \in H$, $f \in C_0^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ et $\|f\|_{p, \infty} \leq C \|f\|_H$ pour un certain $C > 0$ indépendant de f . Montrons d'abord ce résultat pour $f \in H_0$, où H_0 est l'espace engendré par les fonctions noyaux. Par hypothèse on sait que $f \in C_0^p(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$. De plus, soit $x, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^p \in \mathbf{R}^d$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$, et (ε_n) une suite de réels tendant vers 0. En utilisant la formule (2.6) à l'ordre $p - 1$, on a

$$\begin{aligned} \alpha \cdot d_x^p f(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \alpha \cdot (d_{x+\varepsilon_n \tilde{x}^p}^{p-1} f - d_x^{p-1} f)(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{p-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle f, \frac{1}{\varepsilon_n} (\partial_1^{p-1}(k(x + \varepsilon_n \tilde{x}^p, \cdot)\alpha) - \partial_1^{p-1}(k(x, \cdot)\alpha)) \right\rangle_H, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où l'on a omis, comme dans la suite de cette preuve, d'écrire la dépendance vis-à-vis des variables \tilde{x}^i , pour ne pas surcharger les formules. Les fonctions $\Delta_n = \frac{1}{\varepsilon_n} (\partial_1^{p-1}(k(x + \varepsilon_n \tilde{x}^p, \cdot)\alpha) - \partial_1^{p-1}(k(x, \cdot)\alpha))$ convergent simplement vers $\partial_1^p(k(x, \cdot)\alpha)$. Pour montrer qu'elles convergent aussi faiblement dans H , il suffit d'après le lemme 7 de montrer que $\|\Delta_n\|_H$ est borné. Or

$$\begin{aligned} \|\Delta_n\|_H^2 &= \frac{1}{\varepsilon_n^2} (\partial_{12}^{2p-2}(\alpha \cdot k(x + \varepsilon_n \tilde{x}, x + \varepsilon_n \tilde{x})\alpha) - 2\partial_{12}^{2p-2}(\alpha \cdot k(x, x + \varepsilon_n \tilde{x})\alpha) \\ &\quad + \partial_{12}^{2p-2}(\alpha \cdot k(x, x)\alpha)), \end{aligned} \quad (2.8)$$

où le symbole ∂_{12}^{2p-2} signifie que l'on dérive le noyau $p - 1$ fois par rapport à sa première variable, et $p - 1$ fois par rapport à sa seconde variable (dans les mêmes directions $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{p-1}$ pour chacune des deux variables). Cette expression est une variation seconde de $\partial_{12}^{2p-2}k$, donc une variation d'ordre $2p$ de k . D'après les hypothèses, on peut donc écrire $\|\Delta_n\|_H \leq \sqrt{\|k\|_{2p,\infty}|\alpha|\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^p}$. Ainsi $(\Delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée dans H . Par conséquent $\partial_1^p(k(x, \cdot)\alpha)$ appartient à H et c'est la limite faible de Δ_n dans H . D'où $\|\partial_1^p(k(x, \cdot)\alpha)\|_H \leq \liminf \|(\Delta_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_H \leq \sqrt{\|k\|_{2p,\infty}|\alpha|\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^p}$. Revenant à 2.7, on en déduit que $\alpha \cdot d_x^p f = \langle f, \partial_1^p(k(x, \cdot)\alpha) \rangle_H$, puis que

$$|\alpha \cdot d_x^p f| \leq \|\partial_1^p(k(x, \cdot)\alpha)\|_H \|f\|_H \leq \sqrt{\|k\|_{2p,\infty}|\alpha|\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^p} \|f\|_H,$$

et donc $\|f\|_{p,\infty} \leq \sqrt{\|k\|_{2p,\infty}} \|f\|_H$. \square

2.1.4 Noyaux invariants par transformations rigides

Dans les applications concrètes considérées ici, les espaces de Hilbert modélisent des champs de déformation (espace V) ou permettent de mesurer l'appariement entre deux objets (groupes de points, courbes, images, surfaces). Dans la plupart des cas il est clair que l'application d'une transformation rigide (translation ou rotation) aux deux objets en même temps ne devraient pas changer la mesure d'appariement, et que les champs de déformation devraient se correspondre par la même transformation - et en particulier aient la même mesure.

Nous sommes donc amenés à examiner des espaces reproduisants invariants sous l'action de telles transformations. L'autre bénéfice de cette étude est que, la propriété d'invariance permettant de simplifier l'expression du noyau, il devient alors possible de donner des caractérisations constructives de la positivité du noyau (théorèmes de Bochner [9] et Schoenberg [45] dans le cas *scalaire*).

Invariance par translations

Proposition 19 *Soit H un espace reproduisant sur \mathbf{R}^d et k_H son noyau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *pour toute translation τ de \mathbf{R}^d , l'application $v \mapsto v \circ \tau$ est une isométrie dans V ,*
- ii) *il existe une fonction $k_H : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ telle que pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$, $k_H(x, y) = k_H(y - x)$.*

Preuve. Si V est invariant par translations, alors pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}^d$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$,

$$\begin{aligned} \beta \cdot k_H(x + z, y + z)\alpha &= \langle k_H(x, \cdot)\alpha, k_H(y + z, \cdot + z)\beta \rangle_H \\ &= \langle k_H(x, \cdot - z)\alpha, k_H(y + z, \cdot)\beta \rangle_H \\ &= \beta \cdot k_H(x, y + z - z)\alpha = \beta \cdot k_H(x, y)\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi $k_H(x+z, y+z) = k_H(x, y)$. Prenant $z = -x$ on obtient ainsi que $k_H(x, y) = k_H(y-x)$ avec $k_H(t) = k_H(0, t)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction k_H telle que $k_H(x, y) = k_H(y-x)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$. Alors $k_H(x+z, y+z) = k_H(x, y)$ pour tous x, y, z , et donc $\langle k_H(x+z, \cdot + z)\alpha, k_H(y, \cdot)\beta \rangle_H = \beta \cdot k_H(x+z, y+z)\alpha = \beta \cdot k_H(x, y)\alpha = \langle k_H(x, y)\alpha, k_H(y, \cdot)\beta \rangle_H$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$. Les fonctions $k_H(y, \cdot)\beta$ formant un système total dans l'espace de Hilbert H , l'égalité précédente suffit pour montrer l'action des translations sur V est isométrique. \square

Identification des noyaux positifs invariants par translations

Nous voyons à présent une caractérisation partielle des noyaux invariants par translation et de leurs espaces associés, grâce à la transformée de Fourier. Le théorème démontré par Bochner [9] identifie les noyaux positifs scalaires invariants par translations aux fonctions caractéristiques des mesures boréliennes positives bornées. Nous en donnons ici une version restreinte et adaptée au cas des noyaux vectoriels.

On note \mathcal{F} l'opération de transformation de Fourier, et \mathcal{F}^{-1} son inverse.

Théorème 10 (Bochner) *Soit $k : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ une fonction intégrable ainsi que sa transformée de Fourier \hat{k} , et vérifiant $k = \mathcal{F}^{-1}\hat{k}$. Alors k est un noyau positif (i.e. $k(x, y) = k(y-x)$ est positif) si et seulement si sa transformée de Fourier \hat{k} est telle que pour tout $\omega \in \mathbf{R}^d$, $\hat{k}(\omega)$ est un opérateur hermitien positif.*

La condition $k = \mathcal{F}^{-1}\hat{k}$ permet juste d'assurer que k est bien une fonction continue en tout point.

Preuve. La condition de positivité de k dit que pour tous $x^1, \dots, x^n \in \mathbf{R}^d$ et $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbf{R}^m$, la quantité $\sum_{j,k=1}^n \alpha^k \cdot k(x^k - x^j)\alpha^j$ est positive. Cette propriété reste vraie en considérant des vecteurs α^j complexes, en remplaçant bien sûr α^k par son conjugué. A partir de la formule d'inversion de Fourier, nous pouvons réécrire la quantité précédente ainsi :

$$\sum_{j,k=1}^n \alpha^k \cdot k(x^k - x^j)\alpha^j = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \overline{f_{x,\alpha}(\omega)} \hat{k}(\omega) f_{x,\alpha}(\omega) d\omega, \tag{2.9}$$

où $f_{x,\alpha}(\omega) = \sum_{j=1}^n e^{-ix^j \cdot \omega} \alpha^j$. Nous voulons montrer alors que la propriété de positivité reste vraie en remplaçant $f_{x,\alpha}$ par n'importe quelle fonction $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$ de classe C^∞ à support compact. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque \hat{k} est intégrable, il existe un réel $A > 0$ tel que le cube $C_A = [-A, A]^d \subset \mathbf{R}^d$ vérifie $\int_{\mathbf{R}^d \setminus C_A} |\hat{k}(\omega)| d\omega < \varepsilon$. On peut de plus choisir A tel que le support de f soit inclus dans C_A . On considère alors la restriction de f à C_A , que l'on prolonge par périodicité sur \mathbf{R}^d . Les sommes partielles de la série de Fourier de la fonction f_A ainsi constituée convergent uniformément vers f . Par conséquent il existe bien

une fonction $f_{x,\alpha}$ vérifiant $\sup_{\omega \in [-A,A]^d} |f(\omega) - f_{x,\alpha}(\omega)| < \varepsilon$ et $\|f_{x,\alpha}\|_\infty < \|f\|_\infty + \varepsilon$. Nous obtenons ainsi

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d} \overline{f_{x,\alpha}(\omega)} \hat{k}(\omega) f_{x,\alpha}(\omega) d\omega - \int_{\mathbf{R}^d} \overline{f(\omega)} \hat{k}(\omega) f(\omega) d\omega \right| \leq 2\|f\|_\infty^2 \varepsilon + \|f\|_\infty \varepsilon \|\hat{k}\|_{L^1} + (\|f\|_\infty + \varepsilon) \varepsilon \|\hat{k}\|_{L^1}. \quad (2.10)$$

Nous déduisons de ce raisonnement que $\int_{\mathbf{R}^d} \overline{f(\omega)} \hat{k}(\omega) f(\omega) d\omega \geq 0$ pour toute fonction f continue bornée, comme nous l'avions annoncé. Soit à présent ω_0 fixé et raisonnons par l'absurde en supposant que $\hat{k}(\omega_0)$ possède une valeur propre strictement négative. Si $\gamma_0 \in \mathbf{C}^m$ est un vecteur propre associé, il est clair par continuité de \hat{k} , qu'il existe un petit ouvert Ω_0 contenant ω_0 et tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\gamma \cdot \hat{k}(\omega) \gamma < 0$. En considérant alors la fonction continue bornée $f(\omega) = \psi(\omega) \gamma$ où ψ est une fonction scalaire continue strictement positive sur Ω_0 et nulle en dehors, on obtient que $\int_{\mathbf{R}^d} \overline{f(\omega)} \hat{k}(\omega) f(\omega) d\omega < 0$ ce qui est exclu. Par conséquent, les opérateurs $\hat{k}(\omega)$ sont hermitiens positifs pour tout $\omega \in \mathbf{R}^d$.

La réciproque est immédiate ; en effet si les opérateurs $\hat{k}(\omega)$ sont hermitiens positifs pour tout $\omega \in \mathbf{R}^d$, alors l'expression (2.9) est positive pour toute fonction du type $f_{x,\alpha}$, ce qui signifie exactement que le noyau est positif. \square

Proposition 20 *On se place sous les hypothèses du théorème 10. Si de plus $\hat{k}(\omega)$ est strictement positif et borné sur \mathbf{R}^d , alors le produit scalaire de l'espace reproduisant H associé à $k(x, y) = k(y - x)$ s'écrit :*

$$\langle f, g \rangle_H = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{k}(\omega)^{-1} \hat{g}(\omega) d\omega. \quad (2.11)$$

Preuve. Posons

$$\tilde{H} = \left\{ \mathcal{F}^{-1}g \mid g : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m \text{ et } \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{\tilde{H}}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \overline{g(\omega)} \cdot \hat{k}(\omega)^{-1} g(\omega) d\omega < \infty \right\}.$$

$(\tilde{H}, \|\cdot\|_{\tilde{H}})$ est un espace de Hilbert de fonctions (et non de classes de fonctions, puisque nous passons par la transformée de Fourier inverse), et pour tous $x \in \mathbf{R}^d$ et $\alpha \in \mathbf{R}^m$,

$$\begin{aligned} \|k(x, \cdot)\alpha\|_{\tilde{H}}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \overline{e^{-ix \cdot \omega} \hat{k}(\omega) \alpha} \cdot \hat{k}(\omega)^{-1} e^{-ix \cdot \omega} \hat{k}(\omega) \alpha d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \alpha \cdot \hat{k}(\omega) \alpha d\omega < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi les fonctions $k(x, \cdot)\alpha$ appartiennent à \tilde{H} , et de plus pour tout $f \in \tilde{H}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle k(x, \cdot)\alpha, f \rangle_{\tilde{H}} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \overline{e^{-ix \cdot \omega} \hat{k}(\omega) \alpha} \cdot \hat{k}(\omega)^{-1} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix \cdot \omega} \cdot \hat{f}(\omega) d\omega = f(x), \end{aligned}$$

d'après la formule d'inversion de Fourier. Ceci montre que \tilde{H} est un espace reproduisant dont $k(x, y)$ est le noyau. D'après le principe d'unicité (théorème 2.1), il en résulte que $H = \tilde{H}$. \square

Invariance par isométries

Proposition 21 *Soit H un espace reproduisant invariant par translations et k_H la fonction telle que $k_H(x, y) = k_H(y - x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Pour tout élément ρ du groupe orthogonal $O(\mathbf{R}^d)$, l'application $v \mapsto v \circ \rho^{-1}$ est une isométrie de V .*
- ii) *Il existe une fonction $k_H : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ telle que pour tout $z \in \mathbf{R}^d$, $k_H(z) = k_H(|z|)$.*

Preuve.

i) \Rightarrow ii) Pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$ et $\rho \in O(\mathbf{R}^d)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta \cdot k_H(\rho x, \rho y) \alpha &= \langle k_H(\rho x, \rho \cdot) \alpha, k_H(y, \cdot) \beta \rangle_H \\ &= \langle k_H(\rho x, \cdot) \alpha, k_H(y, \rho^* \cdot) \beta \rangle_H \\ &= \alpha \cdot k_H(y, \rho^* \rho x) \beta = \beta \cdot k_H(x, y) \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi $k_H(\rho x, \rho y) = k_H(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$, et donc $k_H(\rho z) = k_H(z)$ pour tout $z \in \mathbf{R}^d$. Par conséquent $k_H(z)$ n'est fonction que de la norme $|z|$.

ii) \Rightarrow i) Pour tous x, y et ρ , on a $k_H(\rho x, \rho y) = k_H(|\rho(y - x)|) = k_H(x, y)$, et donc $\|k_H(x, \rho \cdot) \alpha\|_H^2 = \|k_H(\rho^{-1} x, \cdot) \alpha\|_H^2 = \alpha \cdot k_H(\rho x, \rho x) \alpha = \alpha \cdot k_H(x, x) \alpha = \|k_H(x, y) \alpha\|_H^2$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$. Comme dans le cas des translations, nous en concluons que V est invariant sous l'action de ρ . \square

Invariance pour un espace de champs de vecteurs

Lorsque H est un espace de champs de vecteurs, la propriété d'invariance souhaitable n'est pas celle formulée au paragraphe précédent. En effet l'action naturelle de $\rho \in O(\mathbf{R}^d)$ sur un champ de vecteurs v est celle qui fait "tourner" le champ v , c'est-à-dire $v \mapsto \rho v \circ \rho^{-1}$. Nous pouvons alors donner des conditions plus précises sur le noyau reproduisant :

Proposition 22 *Supposons $d \geq 2$ et soit H un espace reproduisant de champs de vecteurs sur \mathbf{R}^d (i.e. on suppose $m = d$), invariant par translations, et k_H la fonction telle que $k_H(x, y) = k_H(y - x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *pour tout $\rho \in O(\mathbf{R}^d)$, l'application $v \mapsto \rho v \circ \rho^{-1}$ est une isométrie de V ,*
- ii) *Il existe deux fonctions scalaires $h_H, h_H^\perp : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ telles que pour tout $z \in \mathbf{R}^d$, $k_H(z)z = h_H(|z|)z$ et $k_H(z)\alpha = h_H^\perp(|z|)\alpha$ si $z \cdot \alpha = 0$.*

Preuve.

i) \Rightarrow ii) Pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^m$ et $\rho \in O(\mathbf{R}^d)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta \cdot \rho^* k_H(\rho x, \rho y) \rho \alpha &= \langle \rho^* k_H(\rho x, \rho \cdot) \rho \alpha, k_H(y, \cdot) \beta \rangle_H \\ &= \langle k_H(\rho x, \cdot) \rho \alpha, \rho k_H(y, \rho^* \cdot) \beta \rangle_H \\ &= \rho \alpha \cdot \rho k_H(y, \rho^* \rho x) \beta = \beta \cdot k_H(x, y) \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi $k_H(\rho x, \rho y) \rho = \rho k_H(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$, et donc

$$k_H(\rho z) \rho = \rho k_H(z). \quad (2.12)$$

Prenant $\rho = -\text{id}$ on obtient $k_H(-z) = k_H(z)$, et puisque l'on sait déjà que $k_H(-z) = k_H(z)^*$, on en déduit que les $k_H(z)$ sont des opérateurs symétriques. A présent si $\rho \in O(\mathbf{R}^d)$ est tel que $\rho z = z$, on obtient $k_H(z) \rho = \rho k_H(z)$. Ainsi $k_H(z)$ est un opérateur symétrique commutant avec tous les opérateurs orthogonaux qui laissent fixe z . Ceci implique tout d'abord que z est vecteur propre de $k_H(z)$: en effet pour tout ρ tel que $\rho z = z$, $k_H(z)z = k_H(z)\rho z = \rho k_H(z)z$, donc $k_H(z)z$ est fixe par ρ , ce qui implique nécessairement que $k_H(z)z$ et z sont colinéaires. Ensuite, puisque $k_H(z)$ est symétrique, le sous-espace z^\perp orthogonal à z dans \mathbf{R}^d est stable par $k_H(z)$, et $k_H(z)$ commute sur z^\perp avec tous les opérateurs orthogonaux. La restriction de $k_H(z)$ à z^\perp est donc un opérateur scalaire. Ainsi nous avons montré qu'il existe deux scalaires λ et λ^\perp tels que $k_H(z)z = \lambda z$ et $k_H(z)\alpha = \lambda^\perp \alpha$ si $z \cdot \alpha = 0$. Enfin en utilisant la propriété (2.12) avec $\rho \in O(\mathbf{R}^d)$ quelconque, on voit immédiatement que les valeurs λ et λ^\perp ne dépendent que de la norme $|z|$.

ii) \Rightarrow i) Lorsque k_H possède la propriété énoncée, on vérifie facilement que $k_H(\rho z) \rho = \rho k_H(z)$ pour tous z et ρ , puis que V est invariant sous l'action des isométries. \square

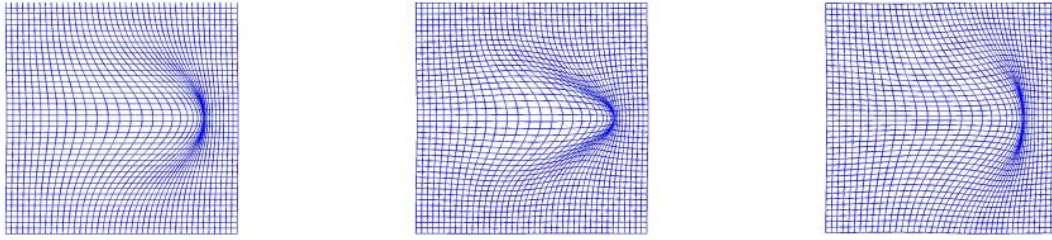
Le cas $h_H = h_H^\perp$ correspond aux noyaux scalaires que nous caractérisons au paragraphe suivant. En pratique, nous avons toujours utilisé des noyaux scalaires pour modéliser les déformations élastiques. On peut trouver dans [13] des exemples de noyaux vectoriels conduisant à des champs invariants et tels que $h_H \neq h_H^\perp$. La figure 2.1.4 montre à quoi ressemblent les champs splines $k(x, \cdot)\alpha$ obtenus en choisissant des noyaux h_H et h_H^\perp gaussiens avec différents paramètres.

2.1.5 Noyaux radiaux scalaires

La façon la plus simple de construire un noyau invariant par isométries et de poser

$$k(x, y) = h(|y - x|) \text{id pour tous } x, y \in \mathbf{R}^d, \quad (2.13)$$

où $h : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction scalaire donnée. Un tel noyau, s'il est positif, satisfait les conditions d'invariance que nous avons énoncées. Notons néanmoins, comme nous l'avons vu, que la classe des noyaux invariants est toujours plus grande.



noyau scalaire ($h_H = h_H^\perp$)

cas $h_H^\perp > h_H$

cas $h_H^\perp < h_H$

FIG. 2.1 – Champs splines

Nous rappelons à présent les résultats mathématiques connus pour qu’une telle fonction h soit de type positif, c’est-à-dire conduite à un noyau k positif. Les résultats qui suivent sont dus à Schoenberg et peuvent être trouvés dans [45]. Le premier résultat est une transposition directe du théorème de Bochner, en intégrant l’invariance rotationnelle dans la calcul de la transformée de Fourier.

Théorème 11 (Schoenberg) *Une fonction $h : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ continue définit via (2.13) un noyau positif si et seulement si*

$$h(r) = \int_0^\infty \Omega_d(ur) d\mu(u),$$

où μ est une mesure borélienne positive bornée sur $[0, +\infty[$ et

$$\Omega_d(r) = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{d-2}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(r),$$

Γ désignant la fonction Gamma et J_ν la fonction de Bessel de première espèce d’ordre ν .

Une classe plus facilement identifiable est formée des fonctions vérifiant la propriété de positivité pour toute dimension d . Un autre résultat de Schoenberg [45] établit le lien entre ces fonctions et les fonctions complètement monotones, c’est-à-dire telles que $(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$ pour $0 < t < \infty$, et f continue en 0. Plus précisément un noyau k est positif en toute dimension si et seulement si $r \mapsto k(\sqrt{r})$ est une fonction complètement monotone. Les fonctions complètement monotones correspondant elles-mêmes aux transformées de Laplace des mesures positives, on obtient l’identification suivante :

Proposition 23 *Une fonction $h : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ continue définit via (2.13) un noyau positif sur \mathbf{R}^d pour toute dimension d si et seulement si l’une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- i) $r \mapsto h(\sqrt{r})$ est une fonction complètement monotone*

ii)

$$h(\sqrt{r}) = \int_0^\infty e^{-r^2 u^2} d\mu(u),$$

μ étant une mesure borélienne sur $[0, \infty[$, positive et bornée.

Paramètre d'échelle

Une autre propriété souhaitable des noyaux serait l'invariance par changement d'échelle, c'est-à-dire que $k_H(\lambda x, \lambda y) = k_H(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Cette propriété est évidemment impossible à satisfaire; on sera donc amené systématiquement dans les applications à choisir une échelle d'observation σ et à considérer des noyaux de la forme :

$$k_H(x, y) = h_H \left(\frac{|x - y|^2}{\sigma^2} \right). \quad (2.14)$$

Le choix du ou des paramètres d'échelle dans les méthodes faisant intervenir des noyaux est un problème important dont nous reparlerons par la suite.

2.1.6 Exemples

Espaces de Sobolev

Pour $s > 0$, l'espace de Hilbert $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ dont la transformée de Fourier \hat{v} satisfait

$$\|v\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\omega|^2)^s |\hat{v}(\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

On sait que $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ s'injecte continûment dans $C_0^k(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ dès que $s > k + \frac{d}{2}$, donc en particulier c'est un espace reproduisant dès que $s > \frac{d}{2}$. De plus, pour $s > d + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{(1+|\omega|^2)^s}$ est intégrable sur \mathbf{R}^d , et on peut alors appliquer le résultat de la proposition 20 : le noyau de $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ est donc la transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{(1+|\omega|^2)^s}$.

Noyaux gaussiens

Pour tout réel $\sigma > 0$, considérons le noyau gaussien donné par :

$$k_\sigma(x, y) = \exp \left(-\frac{|y - x|^2}{\sigma^2} \right) \text{id}.$$

La transformée de Fourier de $k_\sigma(x) = k_\sigma(0, x)$ est aussi égale à une gaussienne scalaire. Donc d'après la proposition 20, k est un noyau positif, et les résultats de régularité vus précédemment permettent d'affirmer que l'espace reproduisant H_σ associé est invariant par

isométries, et qu'il s'injecte dans $C^k(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^m)$ pour tout entier k . De plus la norme dans H_σ est donnée par :

$$\|f\|_{H_\sigma}^2 = \frac{\sigma^d}{2^d \pi^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left(\frac{\sigma^2 |\omega|^2}{4}\right) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Il est important de remarquer que les espaces H_σ , pour des valeurs différentes de σ , sont bien distincts. En effet, on peut voir immédiatement que les fonctions $k_{\sigma'}(x, \cdot)\alpha$ appartiennent à H_σ si et seulement si $\sigma' > \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

Noyaux $k_\sigma(r) = \frac{1}{1+r^2/\sigma^2}$

Un autre noyau très utilisé en pratique est

$$k_\sigma(x, y) = \left(1 + \frac{|y-x|^2}{\sigma^2}\right)^{-1} \text{id}.$$

2.1.7 Choix du noyau pour la modélisation des déformations

En ce qui concerne la théorie des grandes déformations, l'intérêt principal des noyaux reproductifs est de fournir une méthode simple pour la construction de l'espace des champs de déformation V introduit en 1.1.1. Le principe consiste à choisir d'abord le noyau k_V , puis à définir V comme l'unique RKHS correspondant à k_V . Les résultats de régularité vus en 2.1.3 montrent qu'un choix convenable de noyau k_V permet de s'assurer de la validité de toute la construction vue au chapitre 1. D'autre part, le choix d'un noyau fonction de la distance euclidienne garantit une invariance vis-à-vis des transformations rigides de l'espace, ce qui est souhaitable en général.

2.2 Principes de réduction pour les problèmes d'appariement

Nous commençons à présent l'étude des problèmes d'appariement que nous avons introduits brièvement à la section 1.3. La fonctionnelle générale (1.25) comporte deux termes. Le premier est le coût de la déformation, évalué par la norme du champ v dans l'espace de Hilbert L_V^2 . Il garantit que la solution reste bien dans l'espace L_V^2 , et par conséquent que la transformation optimale est bien un difféomorphisme. Le deuxième doit correspondre au terme d'attache aux données, c'est-à-dire qu'il est censé quantifier l'éloignement entre la cible O_2 et la source O_1 transportée par le flot. Dans les applications que nous rencontrerons, les objets O_1 et O_2 seront des objets géométriques localisés dans une certaine région de l'espace $S \subset \mathbf{R}^d$. Il est donc naturel de supposer que le terme d'attache aux données n'est plus fonction de toute la déformation ϕ_1^v , mais seulement des $\phi_1^v(x)$ pour

$x \in S$. De plus, une fois les données discrétisées, les objets ne sont plus décrits que par un nombre fini de points, aussi nous regarderons surtout la situation où S est un ensemble fini. Il apparaît que dans les deux cas (S quelconque ou fini), une telle situation impose des contraintes fortes sur la forme de la solution optimale, contraintes qui s'exprime grâce au noyau reproduisant de l'espace V .

2.2.1 Interpolation optimale de champs de vecteurs

Soit V un espace de champs de déformations dans \mathbf{R}^d et k_V son noyau.

Proposition 24 *Soit $S \subset \mathbf{R}^d$ un sous-ensemble quelconque.*

i) *L'espace $V_S = \{v \in V \mid v(x) = 0 \text{ pour tout } x \in S\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de V . Son orthogonal dans V satisfait*

$$V_S^\perp = \overline{\text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha, x \in S, \alpha \in \mathbf{R}^d\}}.$$

C'est l'unique RKHS de dimension d de noyau k_V sur S .

ii) *Pour tout $v_0 \in V$ il existe un champ $v_0^S \in V_S^\perp$ unique interpolant v_0 sur S , c'est-à-dire tel que $v_0^S(x) = v_0(x)$ pour tout $x \in S$. Le champ v_0^S est le champ de norme minimale dans V interpolant v_0 sur S .*

Preuve.

i) Un champ $v \in V$ appartient à V_S si et seulement s'il vérifie $\alpha \cdot v(x) = 0$ pour tout $x \in S$ et $\alpha \in \mathbf{R}^d$, ce qui équivaut à l'orthogonalité avec $k_V(x, \cdot)\alpha$ dans V . Ainsi $V_S = \text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha, x \in S, \alpha \in \mathbf{R}^d\}^\perp$ et par suite, $V_S^\perp = \overline{\text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha, x \in S, \alpha \in \mathbf{R}^d\}}$. Pour la dernière assertion, on remarque tout d'abord que V_S^\perp peut être considéré comme espace de champs sur S par simple restriction, opération qui ne réduit pas V_S^\perp puisque si deux champs dans V_S^\perp sont égaux sur S alors leur différence appartient à V_S , et donc il sont égaux puisque $V_S \cap V_S^\perp = \{0\}$. Par conséquent V_S^\perp s'identifie bien à l'espace des champs sur S obtenu par complétion de $\text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha, x \in S, \alpha \in \mathbf{R}^d\}$ au sens de la norme induite par le noyau k_V .

ii) v_0^S est la projection orthogonale de v_0 sur V_S^\perp , qui est aussi la projection orthogonale de 0 sur V_S .

□

Théorème 12 *Supposons que le noyau k_V est strictement positif. Soit $v \in V$ et x^1, \dots, x^n des points de \mathbf{R}^d tous distincts, et $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ des vecteurs de \mathbf{R}^d . Il existe une solution unique $v_* \in V$ au problème d'interpolation optimale*

$$\begin{cases} v(x^i) = \gamma^i, & 1 \leq i \leq n \\ \|v\|_V & \text{minimal} \end{cases} . \quad (2.15)$$

La solution v_* s'écrit

$$v_*(x) = \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x) \alpha^i, \quad (2.16)$$

où les $\alpha^i \in \mathbf{R}^d$ sont solutions du système linéaire :

$$\sum_{i=1}^n k_V(x^i, x^j) \alpha^i = \gamma^j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.17)$$

Preuve. Le système 2.17 s'écrit $k(\mathbf{x}, \mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$ en utilisant l'extension de notation vue à la définition 9. Il admet donc une solution unique puisque $k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est inversible par définition de la stricte positivité du noyau. Le champ v_* donné par l'équation 2.16 satisfait alors par construction les conditions d'interpolation $v_*(x^i) = \gamma^i$. On est dans la situation de la proposition 24 avec $S = \{x^i, \quad 1 \leq i \leq n\}$ et $v_0 = v_*$. v_* est un élément de V_S^\perp par sa forme (cf équation 2.16) ; il est donc bien l'unique solution optimale du problème d'interpolation 2.15. \square

2.2.2 Interpolation optimale pour le modèle incluant les déformations rigides

Voyons à présent comment résoudre le problème d'interpolation dans le modèle incluant les déformations rigides présenté en 1.4. Soit (e^1, \dots, e^r) une base quelconque de l'espace $\mathcal{E}(d)$.

Théorème 13 *On suppose que k_V est un noyau strictement positif. Soient x^1, \dots, x^n des points de \mathbf{R}^d tous distincts et $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ des vecteurs de \mathbf{R}^d . Il existe une solution unique $(v^*, e^*) \in V \times \mathcal{E}(d)$ au problème d'interpolation optimale*

$$\begin{cases} v(x^i) + e(x^i) = \gamma^i, & 1 \leq i \leq n \\ \|v\|_V & \text{minimal.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Cette solution s'écrit

$$\begin{cases} v^*(x) = \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x) \alpha^i \\ e^*(x) = \sum_{k=1}^r a^k e^k(x), \end{cases} \quad (2.19)$$

où les $a^k \in \mathbf{R}$ et $\alpha^i \in \mathbf{R}^d$ sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^r a^k e^k(x^j) + \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x^j) \alpha^i = \gamma^j, & 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{j=1}^n e^k(x^j) \cdot \alpha^j = 0 & 1 \leq k \leq n. \end{cases} \quad (2.20)$$

Preuve. Lorsqu'une déformation rigide $e(x) = \sum_{k=1}^k a^k e^k(x)$ est fixée, on se ramène à une interpolation dans V avec les vecteurs $\gamma_r^j = \gamma^j - e(x^j)$, problème dont on connaît la solution. Cette remarque montre que les solutions minimisantes du problème sont de la forme $e(x) = \sum_{k=1}^r a^k e^k(x)$ et $v(x) = \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x) \alpha^i$, avec la contrainte linéaire $\sum_{k=1}^r a^k e^k(x^j) + \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x^j) \alpha^i = \gamma^j$, $1 \leq j \leq n$. L'ensemble de ces champs forme un sous-espace affine $V\mathcal{E}_X$ de $V \times \mathcal{E}(d)$, de dimension r et paramétré par les coefficients a_k , et par conséquent en considérant la projection $\pi_V(V\mathcal{E}_X)$, on voit qu'il existe une solution unique $(v^*, e^*) \in V\mathcal{E}_X$ telle que $\|v^*\|_V$ soit minimale. Pour calculer cette solution, nous revenons aux notations étendues : $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ et $\boldsymbol{\gamma}_r = (\gamma_r^1, \dots, \gamma_r^n)$. On a $\|\pi_V(v)\|_V^2 = \boldsymbol{\alpha}^* k_V(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}$ où $\boldsymbol{\alpha} = k_V(\mathbf{x})^{-1} \boldsymbol{\gamma}_r$. Notons \mathbf{a} le vecteur de composantes a^k et $M_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^r, (\mathbf{R}^m)^n)$ l'opérateur $\mathbf{a} \mapsto (\sum_{k=1}^r a^k e^k(x^j))_j$. On peut écrire $\boldsymbol{\gamma}_r = \boldsymbol{\gamma} - M_{\mathbf{x}} \mathbf{a}$, et il vient $\|\pi_V(v)\|_V^2 = (\boldsymbol{\gamma} - M_{\mathbf{x}} \mathbf{a})^* k_V(\mathbf{x})^{-1} (\boldsymbol{\gamma} - M_{\mathbf{x}} \mathbf{a})$. Cette expression est minimale pour $M_{\mathbf{x}}^* k_V(\mathbf{x})^{-1} (\boldsymbol{\gamma} - M_{\mathbf{x}} \mathbf{a}) = 0$, soit encore $M_{\mathbf{x}}^* \boldsymbol{\alpha} = 0$, ce qui fournit les équations manquantes. \square

2.2.3 Principe de réduction

Cas général

Nous nous intéressons à présent à un problème d'appariement pour lequel le terme d'appariement n'est fonction que du déplacement des points $x \in S$:

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + A((\phi_1^v(x))_{x \in S}), \quad (2.21)$$

où S est quelconque. La minimisation doit donc a priori s'effectuer sur l'espace $L^2([0, 1], V)$. Nous montrons dans cette partie comment il est possible de réduire le domaine de recherche de la solution.

Notons $L_{V,S}^2$ l'ensemble des champs $v \in L^2([0, 1], V)$ tels que pour tout $t \in [0, 1]$, $v_t \in V_{\phi_t^v(S)}^\perp$ au sens de la proposition 24, c'est-à-dire que v_t est limite dans V de champs de la forme $\sum_{i=1}^n k_V(x^i, \cdot) \alpha^i$ avec $x^i \in \phi_t^v(S)$. $L_{V,S}^2$ est un sous-ensemble fermé de L_V^2 .

Théorème 14 *Pour tout champ $v \in L_V^2$, il existe un champ projeté $v^S \in L_{V,S}^2$ tel que $\phi_1^{v^S}(x) = \phi_1^v(x)$ pour tout $x \in S$ et $\|v_t^S\|_V \leq \|v_t\|_V$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Par conséquent la solution du problème optimal 2.21 peut être cherchée dans l'espace $L_{V,S}^2$.

Preuve. Pour tout $t \in [0, 1]$, on définit v_t^S comme le champ minimal interpolant v_t sur $\phi_t^v(S)$. On a donc pour tout $t \in [0, 1]$ et $x \in S$, $v_t(x) = v_t^S(x)$, et donc par unicité de la solution de l'équation de flot, $\phi_t^{v^S}(x) = \phi_t^v(x)$. D'après la proposition 24, $v_t^S \in V_{\phi_t^v(S)}^\perp = V_{\phi_t^{v^S}(S)}^\perp$, et donc $v^S \in L_{V,S}^2$. De plus par construction, $\|v_t^S\|_V \leq \|v_t\|_V$.

Considérons à présent le problème d'appariement 2.21. Puisque $\phi_1^{v^S}(x) = \phi_1^v(x)$ pour tout $x \in S$, les termes d'appariement dans $J(v)$ et $J(v^S)$ sont égaux. Les inégalités $\|v_t^S\|_V \leq \|v_t\|_V$ impliquent donc que $J(v^S) \leq J(v)$. Ainsi le problème de minimisation 2.21 se réduit à un problème de minimisation sur $L_{V,S}^2$. \square

Cas d'un ensemble fini de points

À présent examinons le cas où $S = \{x^1, \dots, x^n\}$, les points x^i étant distincts. Pour tout élément $v \in L_{V,S}^2$, il existe alors des vecteurs $\alpha_t^i \in \mathbf{R}^d$ tels que :

$$v_t(x) = \sum_{i=1}^n k_V(x_t^i, x) \alpha_t^i, \quad (2.22)$$

les trajectoires $x_t^i = \phi_t^v(x^i)$ vérifiant

$$x_t^j = x^j + \int_0^t \sum_{i=1}^n k_V(x_s^i, x_s^j) \alpha_s^i ds. \quad (2.23)$$

On voit donc que l'on va pouvoir paramétrer l'espace de minimisation par les vecteurs α_t^i . Cependant pour définir un nouvel espace de minimisation sur ces variables, nous avons besoin de contrôler la norme des α_t^i . Ceci est possible si l'on suppose la stricte positivité du noyau k_V . En effet, on a l'égalité :

$$\|v_t\|_V^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_t^j \cdot k_V(x_t^i, x_t^j) \alpha_t^i, \quad (2.24)$$

ce qui se réécrit $\|v_t\|_V^2 = \boldsymbol{\alpha}_t^* k_V(\mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t$ avec les notations étendues. La propriété d'inversibilité du flot ϕ_t^v assure que les trajectoires x_t^i ne se coupent jamais. L'application $t \mapsto \mathbf{x}_t$ est donc continue de $[0, 1]$ dans l'ouvert $(\mathbf{R}^d)_*^n$ des n-uplets d'éléments tous distincts de \mathbf{R}^d . À présent supposons que k_V est strictement positif. Alors l'application $\mathbf{x} \mapsto k_V(\mathbf{x})$ est une application continue de $(\mathbf{R}^d)_*^n$ dans l'ensemble des opérateurs inversibles de $\mathcal{L}((\mathbf{R}^d)^n)$. Par conséquent il existe $c > 0$ tel que $|k_V(\mathbf{x}_t)^{-1}| \leq c$ pour tout $t \in [0, 1]$. Revenant à (2.24) on en déduit que $|\boldsymbol{\alpha}_t| \leq c \|v_t\|_V$ et donc que $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}_t$ appartient à l'espace $L^2([0, 1], (\mathbf{R}^d)^n)$.

Réciproquement, si $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}_t$ est un élément de cet espace, nous devons, pour définir les champs $v_t \in V$ par (2.22), calculer tout d'abord les trajectoires par résolution du système intégral (2.23). En notations étendues, ce système s'écrit

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} + \int_0^t k_V(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\alpha}_s ds.$$

Les fonctions $\mathbf{x} \mapsto k_V(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}_t$ sont lipschitziennes dans $(\mathbf{R}^d)^n$, du fait de l'hypothèse d'admissibilité de V . Une majoration grossière donne en fait $2n^2 c_V \|v_t\|_V$ comme constante de

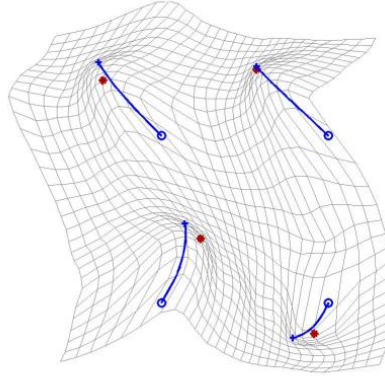


FIG. 2.2 – Appariement de 4 points sur le tore

Lipschitz. Les conditions du lemme 1 sont donc satisfaites (la deuxième est immédiate ici), et par conséquent les trajectoires x_t^i sont uniquement définies et continues pour la variable t . On peut alors définir les champs $v_t \in V$ par l'équation (2.22). et on vérifie alors que $v \in L_V^2$, grâce à la formule (2.24), et le fait que k_V est borné.

Finalement, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 25 *Supposons que le noyau k_V est strictement positif. Alors lorsque $S = \{x^1, \dots, x^n\}$, les points x^i étant tous distincts, la fonctionnelle d'appariement 2.21 peut être écrite comme fonction des paramètres α_t^i dans l'espace $L^2([0, 1], (\mathbf{R}^d)^n)$:*

$$J((\alpha_t^i)) = \lambda \int_0^1 \sum_{i,j} \alpha_t^j \cdot k_V(x_t^i, x_t^j) \alpha_t^i dt + A((x_1^i)), \quad (2.25)$$

les trajectoires $x_t^i \in \mathbf{R}^d$ étant calculées par résolution du système intégral 2.23.

2.2.4 Un premier exemple : appariement de points de référence

L'appariement de points de référence - *landmark matching* - est un problème courant en analyse d'images. Soient $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y^i)_{1 \leq i \leq n}$ deux ensembles de points caractéristiques dans \mathbf{R}^d , par exemple des points de repère sélectionnés dans une image, un ensemble de courbes, ou toute donnée expérimentale. On suppose que ces points se correspondent deux à deux, c'est-à-dire que chaque x^i doit être apparié avec y^i . Le problème consiste à chercher une transformation ϕ dans \mathbf{R}^d permettant de minimiser les distances $|\phi(x^i) - y^i|$. Pour un coût quadratique vis-à-vis de ces distances, le terme d'appariement s'écrit

$$A((z_i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|^2. \quad (2.26)$$

La fonctionnelle générale est alors :

$$J = \sigma_A^2 \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n \alpha_t^j \cdot k_V(x_t^i, x_t^j) \alpha_t^i dt + \sum_{i=1}^n |x_1^i - y^i|^2. \quad (2.27)$$

Les méthodes de minimisation et l'écriture d'un algorithme pour la résolution d'un tel problème seront l'objet du chapitre 6 La figure 2.2.4 montre un résultat obtenu sur un exemple synthétique (attention, sur cet exemple, il s'agit de difféomorphismes sur le tore \mathbf{T}^2 et non l'espace euclidien \mathbf{R}^2). Les cercles représentent les points x^i , les étoiles sont les cibles y^i . Les segments de courbes partant des points x^i sont les trajectoires $x_t^i, t \in [0, 1]$. On a aussi représenté le déplacement d'une grille de référence sous l'action de la déformation optimale.

Au chapitre 3 nous étudierons en détail ce problème d'appariement dans le cas d'une géométrie sphérique.

Chapitre 3

Appariement de points sur la sphère

3.1 Interpolation par champs splines sur des variétés

Nous devons en fait ici reprendre dans un cadre riemannien les constructions vues dans les précédents chapitres. L'approche est en fait légèrement différente, puisque l'on définit en premier lieu un opérateur L_V sur les champs de vecteurs de classe C^∞ . Grâce à la méthode d'extension de Friedrichs, on construit ensuite l'espace V des champs de déformation et son noyau k_V . Notons que ce schéma de construction aurait pu aussi être suivi dans le cadre euclidien.

3.1.1 Cadre mathématique

L'espace euclidien \mathbf{R}^d des chapitres précédents est remplacé par une variété riemannienne (M, g) compacte et sans bord. Pour deux vecteurs tangents α, β en un point x de la variété, leur produit scalaire vis-à-vis de la métrique g est noté simplement $\alpha \cdot \beta$, et $|\alpha|$ désigne la norme de α .

On considère tout d'abord l'espace χ^∞ des champs de vecteurs lisses (i.e. C^∞) sur M , que l'on munit de sa topologie canonique τ^∞ . Sur χ^∞ est défini le produit scalaire L^2 usuel :

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_M u(x) \cdot v(x) d\lambda(x).$$

$d\lambda$ est l'élément de volume sur (M, g) . Nous noterons $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme associée sur χ^∞ . L'espace χ^{L^2} des champs de vecteurs de carré intégrable sur M est le complété de χ^∞ pour cette norme.

À présent nous définissons un deuxième produit scalaire sur χ^∞ , qui nous donnera notre mesure de déformation. Soit $L_V : \chi^\infty \rightarrow \chi^{L^2}$ un opérateur symétrique, continu et fortement monotone, i.e. nous imposons les propriétés suivantes :

$$\forall u, v \in \chi^\infty \quad \langle u, L_V v \rangle_{L^2} = \langle L_V u, v \rangle_{L^2} \quad (3.1)$$

$$L_V : (\chi^\infty, \tau^\infty) \mapsto (L^2, \|\cdot\|_{L^2}) \quad \text{est une application continue,} \quad (3.2)$$

$$\exists B > 0 \quad \forall v \in \chi^\infty \quad \langle L_V v, v \rangle_{L^2} \geq B \|v\|_{L^2}^2. \quad (3.3)$$

Alors $\langle u, v \rangle_V = \langle L_V u, v \rangle_{L^2}$ définit un nouveau produit scalaire sur χ^∞ . Des propriétés 3.2 et 3.3 nous déduisons aussi que la complétion V de $(\chi^\infty, \|\cdot\|_V)$ s'injecte continûment dans χ^{L^2} . De plus, en notant que pour tout $u \in \chi^{L^2}$, la forme linéaire $v \mapsto \langle u, v \rangle_{L^2}$ est continue sur V , on définit une extension de l'application réciproque $L_V^{-1} : \chi^{L^2} \rightarrow \chi^{L^2}$ en posant $\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle L_V^{-1} u, v \rangle_V$. Cet opérateur L_V^{-1} est auto-adjoint positif et injectif. Son inverse définit une extension de l'opérateur L_V sur un sous-espace $D(L_V)$ dense dans V , appelée extension de Friedrichs (voir par exemple [60]).

À présent nous imposons la propriété additionnelle fondamentale : V s'injecte continûment dans l'espace $(\chi^1, \|\cdot\|_{1,\infty})$ des champs de vecteurs C^1 , c'est-à-dire :

$$\exists C > 0 \quad v \in V \quad \Rightarrow \quad v \in \chi^1 \quad \text{et} \quad \|v\|_{1,\infty} \leq C \|v\|_V \quad (3.4)$$

où $\|v\|_{1,\infty} := \|v\|_\infty + \sup_{u \in \chi^\infty} \{\|\nabla_u v\|_\infty\}$. L'opérateur ∇ désigne ici la dérivation covariante des champs de vecteurs sur M .

Interpolation optimale dans V Soient $x^1, \dots, x^n \in M$ des points distincts sur la variété, et $\gamma^i \in T_{x^i} M$, $1 \leq i \leq n$, des vecteurs tangents associés. Le problème d'interpolation optimale dans V consiste à trouver $v \in V$ tel que

$$(IO) \quad \begin{cases} v(x^i) = \gamma^i & 1 \leq i \leq n \\ \|v\|_V \text{ est minimal.} \end{cases}$$

Si nous relaxons la contrainte nous obtenons le

Interpolation optimale relaxée dans V Soient $\sigma > 0$ et $x^1, \dots, x^n \in M$ des points distincts sur la variété, et $\gamma^i \in T_{x^i} M$, $1 \leq i \leq n$, des vecteurs tangents associés. Le problème d'interpolation optimale σ -relaxé dans V consiste à trouver $v \in V$ tel que

$$(\sigma\text{-}IO) \quad J(v) = \|v\|_V^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |v(x^i) - \gamma^i|^2 \quad \text{est minimal.}$$

Dans la suite nous noterons $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ les éléments de la variété produit M^n . Nous équipons M^n de sa structure riemannienne canonique : si $\alpha, \beta \in T_{\mathbf{x}} M^n$ nous avons $\alpha \cdot \beta := \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \beta^i$ (avec des notations évidentes). Nous utiliserons aussi M_\star^n l'ouvert de M^n constitué des \mathbf{x} tels que tous les x^i sont distincts.

3.1.2 Noyau associé à V

Les problèmes d'interpolation dans V se résolvent à l'aide du noyau de l'espace V . Du fait de la propriété d'injection 3.4, les formes linéaires

$$\delta_x^\alpha : v \mapsto v(x) \cdot \alpha$$

sont continues pour tout $x \in M$ et $\alpha \in T_x M$. Il existe donc $\hat{\delta}_x^\alpha \in V$ tel que $\langle \hat{\delta}_x^\alpha, v \rangle_V = v(x) \cdot \alpha \quad \forall v \in V$, et ainsi, comme dans le cas euclidien, on peut définir le noyau reproduisant k_V de l'espace de déformation V : pour tous $x, y \in M$, $k_V(x, y)$ est l'opérateur linéaire de $T_x M$ dans $T_y M$ défini par

$$k_V(x, y)\alpha := \hat{\delta}_x^\alpha(y).$$

k_V est aussi la fonction de Green associée à l'opérateur L_V .

Soit à présent $\mathbf{x} \in M^n$. On définit le tenseur de covariance $k_V(\mathbf{x})$: c'est l'opérateur linéaire sur $T_{\mathbf{x}} M^n$ tel que $k_V(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} = (\gamma^1, \dots, \gamma^n) \in T_{\mathbf{x}} M^n$ est donné par

$$\gamma^i = \sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i)\alpha^j$$

où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, $\alpha^i \in T_{x^i} M$.

Comme dans le cas euclidien, nous disposons de la formule 17 pour l'expression du noyau. Avec une hypothèse supplémentaire de compacité sur l'injection $V \hookrightarrow H$, on peut alors en déduire une méthode de calcul du noyau k_V à partir des vecteurs propres de l'opérateur L_V .

Proposition 26 *Si l'opérateur L_V vérifie la propriété additionnelle suivante :*

$$L \text{ l'injection } V \hookrightarrow H \text{ est compacte.} \quad (3.5)$$

Alors,

a) *Il existe des champs $w_m \in V$ vecteurs propres de L_V , associés à des valeurs propres λ_m , tels que*

- $(w_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est une base orthonormée de L^2 ,
- $(w_m / \sqrt{\lambda_m})_{m \in \mathbf{N}}$ est une base orthonormée de V ,
- $(\lambda_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante qui diverge vers $+\infty$.

b) *Soient $x, y \in M$ et $\alpha \in T_x M$. Le noyau reproduisant k_V peut être calculé par la formule :*

$$k_V(x, y)\alpha = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{\lambda_m} (w_m(x) \cdot \alpha) w_m(y). \quad (3.6)$$

Preuve.

a) L'injection $V \hookrightarrow \chi^{L^2}$ étant supposée compacte, l'opérateur auto-adjoint positif $L_V^{-1} : \chi^{L^2} \rightarrow \chi^{L^2}$ est compact [60]. Par conséquent, d'après le théorème de Riesz-Fredholm, L_V^{-1} et donc aussi L_V , peuvent être diagonalisés dans une base Hilbertienne de χ^{L^2} [12].

b) On a

$$\begin{aligned} k_V(x, y)\alpha &= \hat{\delta}_x^\alpha(y) \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{\lambda_m} \langle w_m, \hat{\delta}_x^\alpha \rangle_V w_m(y) \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{\lambda_m} w_m(x) \cdot \alpha w_m(y). \end{aligned}$$

□

3.1.3 Solution du problème d'interpolation

Lemme 8 $k_V(x, y)^* = k_V(y, x)$ pour tous $x, y \in M$, où $*$ désigne l'opérateur adjoint sur $\mathcal{L}(T_x M, T_y M)$.

Preuve.

$$k_V(x, y)\alpha_x \cdot \alpha_y = \hat{\delta}_x^{\alpha_x}(y) \cdot \alpha_y = \langle \hat{\delta}_x^{\alpha_x}, \hat{\delta}_y^{\alpha_y} \rangle_V = \alpha_x \cdot k_V(y, x)\alpha_y$$

□

Proposition 27 a) Soient $\mathbf{x} \in M_\star^n$ et $\gamma \in T_{\mathbf{x}}M^n$. La solution du problème d'interpolation (IO) est unique et donnée par

$$v_\star(x) = \hat{\delta}_{\mathbf{x}}^\alpha := \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_{x^i}^{\alpha^i} = \sum_{i=1}^n k_V(x^j, x)\alpha^j$$

où les $\alpha^j \in T_{x^j}M$ sont solutions du système linéaire de dimension $d \cdot n$: $k_V(\mathbf{x})\alpha = \gamma$, soit plus explicitement :

$$\sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i)\alpha^j = \gamma^i \quad 1 \leq i \leq n.$$

b) Soient $\sigma > 0$, $\mathbf{x} \in M_\star^n$ et $\gamma \in T_{\mathbf{x}}M^n$. La solution du problème d'interpolation relaxé (σ IO) est unique et donnée par

$$v_x(x) = \hat{\delta}_{\mathbf{x}}^\alpha := \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_{x^i}^{\alpha^i}$$

où les α^j sont solutions de $k_V(\mathbf{x})\alpha + \sigma^2\alpha = \gamma$ i.e.

$$\sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i)\alpha^j + \sigma^2\alpha^i = \gamma^i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Preuve. a) Introduisons les sous-espaces suivants de V : si $u \in V$ nous dirons que

- $u \in V_{\mathbf{x}}^0$ s'il s'annule en chaque x^i ,
- $u \in V_{\mathbf{x}}^\gamma$ si $u(x^i) = \gamma^i$ pour tout i , et
- $u \in D_{\mathbf{x}}$ s'il existe n vecteurs tangents $\alpha^i \in T_{x^i}M$ tels que $u = \sum_j \hat{\delta}_{x^j}^{\alpha^j}$.

$V_{\mathbf{x}}^\gamma$ est un sous-espace affine de V , de direction $V_{\mathbf{x}}^0$, et les sous-espaces $V_{\mathbf{x}}^0$ et $D_{\mathbf{x}}$ sont orthogonaux : en effet si $u = \sum_j \hat{\delta}_{x^j}^{\alpha^j}$ et $v \in V_{\mathbf{x}}^0$,

$$\langle u, v \rangle_V = \sum_{j=1}^n \langle \hat{\delta}_{x^j}^{\alpha^j}, v \rangle_V = \sum_{j=1}^n v(x^j) \cdot \alpha^j = 0.$$

Nous déduisons de ceci que $k_V(\mathbf{x})$ est injectif (donc bijectif), et donc que le système linéaire proposé possède une solution unique, correspondant à l'intersection de $V_{\mathbf{x}}^\gamma$ et $D_{\mathbf{x}}$. Ces sous-espaces étant orthogonaux, nous en concluons que cette solution est exactement le champ interpolant de norme minimale.

b) Avec le mêmes notations que précédemment, nous voyons que sur chaque $V_{\mathbf{x}}^\beta$, $\beta \in T_{\mathbf{x}}M^n$, le second terme de la fonctionnelle $J(u)$ est constant et égal à $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |\beta^i - \gamma^i|^2$, et ainsi que la fonctionnelle est minimale lorsque $\|u\|_V^2$ l'est. Ceci prouve que la solution du problème (σIO) appartient nécessairement à $D_{\mathbf{x}}$. Sur ce sous-espace nous pouvons réécrire $J(u)$ comme fonction quadratique des variables α^i , où $u = \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_{x^i}^{\alpha^i}$:

$$\begin{aligned} J(u) &= \|u\|_V^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |u(x^i) - \gamma^i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \hat{\delta}_{x^i}^{\alpha^i}, u \rangle_V + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |\gamma^i - u(x^i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot u(x^i) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |\gamma^i - u(x^i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i) \alpha^j + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |\gamma^i - \sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i) \alpha^j|^2. \end{aligned}$$

Ainsi $J(u)$ a un unique minimum sur $D_{\mathbf{x}}$, que nous obtenons en calculant son gradient en tant que fonction de α . Utilisant la symétrie du noyau et la propriété $k_V(x^j, x^i)^* = k_V(x^i, x^j)$, nous obtenons, notant $(\nabla J)^k \in T_{x^k}M$ les composantes de ce gradient :

$$\begin{aligned} (\nabla J)^k \cdot \beta^k &= 2 \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x^k) \alpha^i \cdot \beta^k + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \gamma^i - \sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i) \alpha^j \cdot -k_V(x^k, x^i) \beta^k \\ &= 2 \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x^k) \alpha^i \cdot \beta^k + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \gamma^i - \sum_{j=1}^n k_V(x^j, x^i) \alpha^j \cdot -k_V(x^k, x^i) \beta^k. \end{aligned}$$

Finalement nous trouvons que ce gradient s'annule si et seulement si

$$\sigma^2 \alpha^j + \sum_{i=1}^n k_V(x^i, x^j) \alpha^i = \gamma^j \quad 1 \leq j \leq n.$$

□

Dans la suite nous noterons pour $\sigma \geq 0$,

$$k_{V,\sigma}(\mathbf{x}) = k_V(\mathbf{x}) + \sigma^2 \text{id}.$$

Le problème d'interpolation est alors toujours résolu en inversant le système $k_{V,\sigma}(\mathbf{x})\alpha = \gamma$, le cas $\sigma = 0$ correspondant à l'appariement exact.

3.1.4 Une nouvelle métrique Riemannienne sur M_\star^n

Proposition 28 *Pour tous $\sigma \geq 0$ et $\mathbf{x} \in M_\star^n$, l'opérateur $k_{V,\sigma}(\mathbf{x})$ est inversible et $g_{V,\sigma}(\mathbf{x}) = k_{V,\sigma}^{-2}(\mathbf{x})k_V(\mathbf{x})$ est un opérateur symétrique défini positif sur $T_\mathbf{x}M^n$, définissant un nouveau produit scalaire et une nouvelle norme $|\cdot|_{g_{V,\sigma}}$ sur cet espace. De plus pour tout $\gamma \in T_\mathbf{x}M_\star^n$, si v_\star désigne la solution du problème (σIO), alors $\|v_\star\|_V = |\gamma|_{g_{V,\sigma}}$.*

Preuve. Nous savons déjà que l'opérateur $k_V(\mathbf{x})$ est inversible. De plus,

$$k_V(\mathbf{x})\alpha \cdot \beta = \sum_{i,j=1}^n k_V(x^j, x^i) \alpha^j \cdot \beta^i = \sum_{i,j=1}^n \alpha^j \cdot k_V(x^i, x^j) \beta^i = \alpha \cdot k_V(\mathbf{x})\beta.$$

Ceci prouve la symétrie de $k_V(\mathbf{x})$. La positivité vient de l'égalité :

$$k_V(\mathbf{x})\alpha \cdot \alpha = \|\hat{\delta}_\mathbf{x}^\alpha\|_V^2 \geq 0.$$

A présent si $\alpha = k_V(\mathbf{x})^{-1}\gamma$, nous avons

$$\|v_\star\|_V^2 = \|\hat{\delta}_\mathbf{x}^\alpha\|_V^2 = k_V(\mathbf{x})\alpha \cdot \alpha = \gamma \cdot k_V(\mathbf{x})^{-1}\gamma = |\gamma|_{k_V}.$$

Par conséquent, $k_V(\mathbf{x})$ est symétrique défini positif, et il en va de même pour $k_{V,\sigma}^{-2}(\mathbf{x})k_V(\mathbf{x})$.

En outre, si $\alpha = k_{V,\sigma}(\mathbf{x})^{-1}\gamma$, nous avons

$$\begin{aligned} \|v_\star\|_V^2 &= \|\hat{\delta}_\mathbf{x}^\alpha\|_V^2 = k_V(\mathbf{x})\alpha \cdot \alpha = k_V(\mathbf{x})k_{V,\sigma}(\mathbf{x})^{-1}\gamma \cdot k_{V,\sigma}(\mathbf{x})^{-1}\gamma \\ &= k_{V,\sigma}(\mathbf{x})^{-1}k_V(\mathbf{x})k_{V,\sigma}(\mathbf{x})^{-1}\gamma \cdot \gamma = |\gamma|_{k_{V,\sigma}}. \end{aligned}$$

□

Par conséquent nous avons muni la variété M_\star^n d'une nouvelle structure riemannienne $g_{V,\sigma}$ dont la régularité dépend du choix de l'opérateur L_V . Au minimum nous savons déjà que $\mathbf{x} \mapsto g_{V,\sigma}(\mathbf{x})$ est C^1 d'après la propriété 3.4, ce qui est suffisant pour définir les chemins géodésiques pour cette nouvelle métrique. Ce sera le propos de la partie suivante.

3.2 Application à la sphère S^2 - Calcul du noyau du laplacien vectoriel sphérique

Nous développons à présent le cas particulier de la géométrie sphérique, c'est-à-dire que l'on choisit $M = S^2$ la sphère unité de \mathbf{R}^3 . Nous allons examiner le cas où l'opérateur L_V est égal à une puissance du laplacien de de Rham, défini sur les champs de vecteurs : $L_V = \Delta^s$. L'intérêt de ces opérateurs est qu'ils sont invariants par rotations, et surtout qu'il est possible d'en calculer les champs de vecteurs propres, et donc, via la formule 3.5, les noyaux associés. De plus, le point de départ de cette étude était le travail de Muge Bakircioglu et al. [7], qui étudie le même problème d'appariement difféomorphique de points sur la sphère, mais où le noyau k_V est obtenu en calculant le laplacien scalaire sur chaque coordonnée sphérique, ce qui ne donne plus un opérateur invariant. Il s'agissait donc pour nous de déterminer le véritable laplacien sphérique vectoriel et de réécrire l'algorithme d'appariement pour cet opérateur.

Avant de donner la formule explicite, nous introduisons quelques notions relatives à la géométrie sphérique.

3.2.1 Transport parallèle sur la sphère

Pour deux points $x, y \in S^2$ non opposés, on définit l'opération $T(x, y) : T_x S^2 \rightarrow T_y S^2$ de transport parallèle le long de l'unique géodésique liant x à y (arc de grand cercle). En assimilant les vecteurs tangents à la sphère à des éléments \mathbf{R}^3 , l'opérateur $T(x, y)$ est une simple rotation de l'espace.

3.2.2 Laplacien vectoriel sphérique

L'opérateur laplacien de de Rham se définit sur les formes différentielles d'ordre p quelconque d'une variété riemannienne M via la formule

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d,$$

où d désigne la différentielle extérieure et δ la codifférentielle, définie comme l'adjoint de d pour la dualité de Hodge : $\delta = -*d*$. Pour une présentation de ces notions, nous renvoyons à [11] et [34]. Via l'isomorphisme entre les formes différentielles d'ordre 1 et les champs de vecteurs, il est alors possible de définir un opérateur laplacien sur les champs de vecteurs [35]. Notons qu'il ne s'obtient pas en calculant simplement le laplacien scalaire sphérique pour chaque coordonnée sphérique du champ.

Nous n'avons pas besoin ici d'écrire la formule explicite de l'opérateur laplacien. Il nous suffit d'en connaître les valeurs propres et les champs de vecteurs propres afin d'appliquer la formule (3.6).

3.2.3 Les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien sphérique scalaire. Il y a $2m + 1$ harmoniques sphériques d'ordre m pour $m \geq 0$, associées à la valeur propre $\lambda_m = m^2(m + 1)^2$. Elles sont données, en coordonnées polaires, par (voir [40]) :

$$Y_{m0}(\theta, \varphi) = k_{m0}P_m(\cos \theta)$$

pour $m \geq 0$, et

$$\begin{cases} Y_{ml}^c(\theta, \varphi) = k_{ml}P_m^l(\cos \theta) \cos l\varphi \\ Y_{ml}^s(\theta, \varphi) = k_{ml}P_m^l(\cos \theta) \sin l\varphi \end{cases}$$

pour $1 \leq l \leq m$ et $m \geq 1$, avec

$$\begin{cases} k_{m0} = \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \\ k_{ml} = \sqrt{\frac{2m+1}{2\pi} \frac{(m-l)!}{(m+l)!}} \end{cases}$$

Les P_m sont les polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \\ &= \sum_{\frac{m}{2} \leq k \leq m} (-1)^{m-k} \frac{(2k-1)!!}{(m-k)!(2k-m)!2^{m-k}} x^{2k-m} \end{aligned}$$

et P_m^l les fonctions de Legendre associées :

$$\begin{aligned} P_m^l(x) &= (-1)^l (1-x^2)^{l/2} \frac{d^l}{dx^l} P_m(x) \\ &= (-1)^{m+l} (1-x^2)^{l/2} \sum_{\frac{m+l}{2} \leq k \leq m} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(m-k)!(2k-(m+l))!2^{m-k}} x^{2k-(m+l)} \end{aligned}$$

Nous utilisons la notation $(2n+1)!! = 1 * 3 * \dots * (2n+1)$ et $(2n)!! = 2 * 4 * \dots * (2n)$ avec la règle $0!! = (-1)!! = 1$.

3.2.4 Les champs de vecteurs harmoniques

Les vecteurs propres du laplacien vectoriel s'obtiennent en calculant les gradients des harmoniques sphériques [35]. Plus précisément, les champs harmoniques sont, pour $m \geq 1$ et $1 \leq l \leq m$,

$$\begin{cases} E_{m0} = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \nabla Y_{ml} \\ E_{ml}^c = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \nabla Y_{ml}^c \\ E_{ml}^s = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \nabla Y_{ml}^s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_{m0}^\perp = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} (\nabla Y_{ml})^\perp \\ E_{ml}^{c\perp} = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} (\nabla Y_{ml}^c)^\perp \\ E_{ml}^{s\perp} = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} (\nabla Y_{ml}^s)^\perp \end{cases}$$

où \perp désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ appliquée sur chaque espace tangent.

À présent la formule du gradient en coordonnées sphériques (θ, φ) s'écrit, pour une fonction scalaire f ,

$$\nabla f = \partial_\theta f e_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi f e_\varphi.$$

Après calcul, nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla Y_{m0} = -\sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \sin \theta P'_m(\cos \theta) e_\theta \\ \nabla Y_{ml}^c = -k_{ml} \sin \theta (P_m^l)'(\cos \theta) \cos l\varphi e_\theta - k_{ml} P_m^l(\cos \theta) l \sin l\varphi \frac{1}{\sin \theta} e_\varphi \\ \nabla Y_{ml}^s = -k_{ml} \sin \theta (P_m^l)'(\cos \theta) \sin l\varphi e_\theta + k_{ml} P_m^l(\cos \theta) l \cos l\varphi \frac{1}{\sin \theta} e_\varphi, \end{cases}$$

3.2.5 Formule analytique du noyau

Proposition 29 *Le noyau reproduisant correspondant à $L_V = \Delta^2$ s'écrit*

$$k_V(x, y) = h_V(\psi(x, y))T(x, y)$$

où $\psi(x, y)$ est l'angle entre les deux points x et y , $T(x, y)$ l'opération de transport parallèle définie en 3.2.1, et $h_V(\psi)$ est une fonction scalaire donnée par :

$$h_V(\psi) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\lambda_m} \frac{2m+1}{4\pi m(m+1)} (P'_m(\cos \psi) + (\sin \psi) P_m^{1'}(\cos \psi)). \quad (3.7)$$

La fonction $h_V(\psi)$ est représentée figure 3.1. La forme de la fonction $h_V(\psi)$ est directement reliée au choix initial de l'espace V . En modifiant les valeurs propres λ_m de l'opérateur L_V , on obtient différents types de champs de déformations.

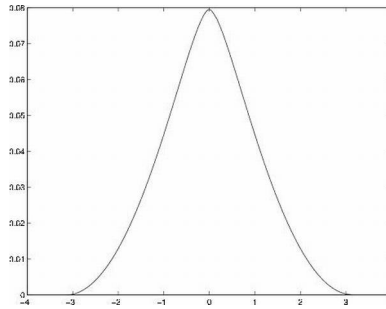


FIG. 3.1 – Graphe de la fonction $h_V(\psi)$

Preuve. Par invariance rotationnelle, nous pouvons nous restreindre à des positions spécifiques de x et y . Supposons donc que x est le pôle nord ($\theta_x = 0$) et que y est en position $\theta_y = \theta, \varphi_y = 0$ en coordonnées sphériques.

Pour calculer les $\nabla Y_{ml}(x)$, faisons tendre θ vers 0 dans les expressions générales. Nous avons

$$\frac{P_m^l(\cos \theta)}{\sin \theta} = (-1)^l (\sin \theta)^{\frac{l-1}{2}} P_m^{(l)}(\cos \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \begin{cases} -P_m'(1) & \text{si } l = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} (\sin \theta) P_m^{l'}(\cos \theta) &= -(-1)^l l (\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{l-1}{2}} P_m^{(l)}(\cos \theta) \\ &\quad + (-1)^l (\sin \theta)^{\frac{l+1}{2}} P_m^{(l+1)}(\cos \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \begin{cases} P_m'(1) & \text{si } l = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Enfin, lorsque θ tend vers 0, les vecteurs $(\cos \varphi)e_\theta - (\sin \varphi)e_\varphi$ et $(\sin \varphi)e_\theta + (\cos \varphi)e_\varphi$ tendent respectivement vers e_1 et e_2 de coordonnées cartésiennes $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$, et ce uniformément en φ . Ainsi $\nabla Y_{ml}^c(x)$ et $\nabla Y_{ml}^s(x)$ sont nuls sauf pour $l = 1$, et $\nabla Y_{m1}^c(x) = -k_{m1} P_m'(1) e_1$, $\nabla Y_{m1}^s(x) = k_{m1} P_m'(1) e_2$.

À présent retournons à la formule donnant $k_V(x, y)$:

$$\begin{aligned} k_V(x, y) \alpha_x &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\lambda_m} (\langle E_{m1}^c(x), \alpha_x \rangle E_{m1}^c(y) + \langle E_{m1}^s(x), \alpha_x \rangle E_{m1}^s(y) \\ &\quad + \langle E_{m1}^c(x)^\perp, \alpha_x \rangle E_{m1}^c(y)^\perp + \langle E_{m1}^s(x)^\perp, \alpha_x \rangle E_{m1}^s(y)^\perp) \\ k_V(x, y) \alpha_x &= \sum_{m \geq 1} \frac{k_{m1} P_m'(1)}{\lambda_m m(m+1)} (-\langle e_1, \alpha_x \rangle \nabla Y_{m1}^c(y) - \langle e_2, \alpha_x \rangle \nabla Y_{m1}^s(y) \\ &\quad - \langle e_2, \alpha_x \rangle \nabla Y_{m1}^c(y)^\perp + \langle e_1, \alpha_x \rangle \nabla Y_{m1}^s(y)^\perp) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} \nabla Y_{m1}^c(y) = -k_{m1} (\sin \theta) P_m^{1'}(\cos \theta) e_\theta(y) \\ \nabla Y_{m1}^s(y) = -k_{m1} P_m'(\cos \theta) e_\varphi(y) \end{cases},$$

et de plus $e_\theta(y) = T(x, y) e_1$, $e_\varphi(y) = T(x, y) e_2$. On obtient ainsi :

$$k_V(x, y) \alpha_x = h_V(\theta) T(x, y) \alpha_x,$$

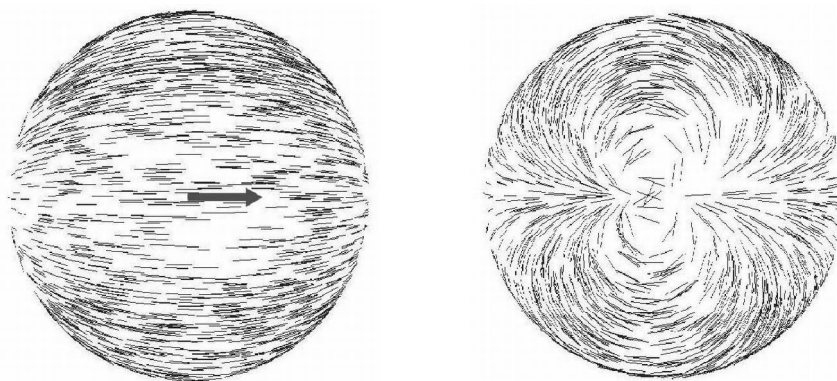
où

$$h_V(\theta) = \sum_{m \geq 1} \frac{k_{m1}^2 P_m'(1)}{\lambda_m m(m+1)} (P_m'(\cos \theta) + (\sin \theta) P_m^{1'}(\cos \theta)).$$

Finalement, nous savons que $P_m'(1) = \frac{m(m+1)}{2}$ et $k_{m1}^2 = \frac{2m+1}{2\pi m(m+1)}$, et donc

$$h_V(\theta) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\lambda_m} \frac{2m+1}{4\pi m(m+1)} (P_m'(\cos \theta) + (\sin \theta) P_m^{1'}(\cos \theta)).$$

□

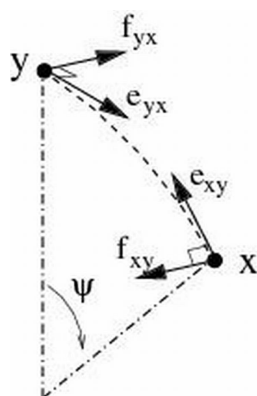

 FIG. 3.2 – Transport parallèle $T(x, \cdot)\alpha_x$ d'un vecteur α_x . Vue de face et de dos

3.2.6 Calcul numérique du noyau - Formule non singulière

L'opération de transport parallèle $T(x, y)$ peut être calculée en un minimum d'opérations. Soient $x, y \in S^2$ deux points distincts et non opposés, et définissons les bases (e_{xy}, f_{xy}) et (e_{yx}, f_{yx}) de $T_x S^2$ et $T_y S^2$ de la manière suivante (voir figure 3.3) :

$$\begin{cases} f_{xy} = \frac{x \times y}{|x \times y|} \\ e_{xy} = f_{xy} \times x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_{yx} = \frac{y \times x}{|y \times x|} = -f_{xy} \\ e_{yx} = f_{yx} \times y \end{cases}$$

où \times désigne le produit vectoriel dans \mathbf{R}^3 (ici points et vecteurs sont vus en tant qu'éléments de \mathbf{R}^3). La matrice de $T(x, y)$ dans cette base est égale à $-\text{id}$. On a ainsi, pour tout


 FIG. 3.3 – Bases mutuelles de x et y

$$\alpha_x \in T_x S^2,$$

$$T(x, y)\alpha_x = -(\alpha_x \cdot e_{xy})e_{yx} - (\alpha_x \cdot f_{xy})f_{yx}.$$

La figure 3.2 permet de visualiser le champ de vecteurs $T(x, \cdot)\alpha_x$. Le vecteur α_x est représenté par la flèche.

L'opération de transport parallèle $T(x, y)$ présente une singularité en $y = -x$. Pour corriger ceci, nous allons la remplacer par une opération modifiée $\tilde{T}(x, y)$. Tout d'abord, introduisons les vecteurs non normalisés $\tilde{e}_{xy} = \sin \psi e_{xy}$ et $\tilde{f}_{xy} = \sin \psi f_{xy}$. On a en fait $f_{xy} = x \times y$ et $e_{xy} = f_{xy} \times x$. Ensuite, écrivons

$$T(x, y)\alpha_x = \alpha_x + (T(x, y)\alpha_x - \alpha_x),$$

$$T(x, y)\alpha_x = \alpha_x - (\alpha_x \cdot e_{xy})(e_{xy} + e_{yx}) - (\alpha_x \cdot f_{xy})(f_{xy} + f_{yx}).$$

Or $f_{xy} + f_{yx} = 0$ et $e_{xy} + e_{yx} = f_{xy} \times (x - y)$. A partir de la formule du produit vectoriel :

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w,$$

et du fait que $x \cdot y = \cos \psi$, nous trouvons

$$e_{xy} + e_{yx} = \frac{1 - \cos \psi}{\sin \psi}(x + y).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T(x, y)\alpha_x &= \alpha_x - \frac{1 - \cos \psi}{\sin \psi}(\alpha_x \cdot e_{xy})(x + y) \\ &= \alpha_x - \frac{1 - \cos \psi}{\sin \psi}(\alpha_x \cdot \frac{\tilde{e}_{xy}}{\sin \psi})(x + y) \\ &= \alpha_x - \frac{1}{1 + \cos \psi}(\alpha_x \cdot \tilde{e}_{xy})(x + y). \end{aligned}$$

Par conséquent nous allons définir :

$$\tilde{T}(x, y)\alpha_x = (1 + \cos \psi)T(x, y)\alpha_x = (1 + \cos \psi)\alpha_x - (\alpha_x \cdot (\tilde{e}_{xy}))(x + y).$$

On exprime alors le noyau $k_V(x, y)$ en fonction de ce nouvel opérateur $\tilde{T}(x, y)$. Ceci se fait en remarquant que

$$\begin{aligned} P'_m(\cos \psi) + \sin \psi P_m^{1'}(\cos \psi) &= (1 + \cos \psi)P'_m(\cos \psi) - (\sin \psi)^2 P''_m(\cos \psi) \\ &= (1 + \cos \psi)(P'_m(\cos \psi) - (1 - \cos \psi)P''_m(\cos \psi)). \end{aligned}$$

La formule finale, avec correction des singularités, s'écrit donc :

$$k_V(x, y)\alpha_x = \tilde{f}_V(\cos \psi(x, y))\tilde{T}(x, y)\alpha_x, \quad (3.8)$$

avec

$$\tilde{f}_V(r) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\lambda_m} \frac{2m+1}{4\pi m(m+1)} (P'_m(r) - (1-r)P''_m(r)). \quad (3.9)$$

Les coefficients de ce développement en série peuvent être pré-calculés par récurrence en utilisant la relation :

$$(m+1)P_{m+1}(x) - (2m+1)xP_m(x) + mP_{m-1}(x) = 0.$$

Le calcul effectif de la fonction \tilde{f}_V se fait alors en tronquant la sommation à un certain ordre. En modifiant les valeurs propres λ_m , on voit que l'on peut ainsi coder une grande variété de noyaux invariants par rotations sur la sphère.

La figure 3.4 représente le champ de vecteurs $k_V(x, \cdot)\alpha_x$. Le vecteur α_x est représenté par la flèche.

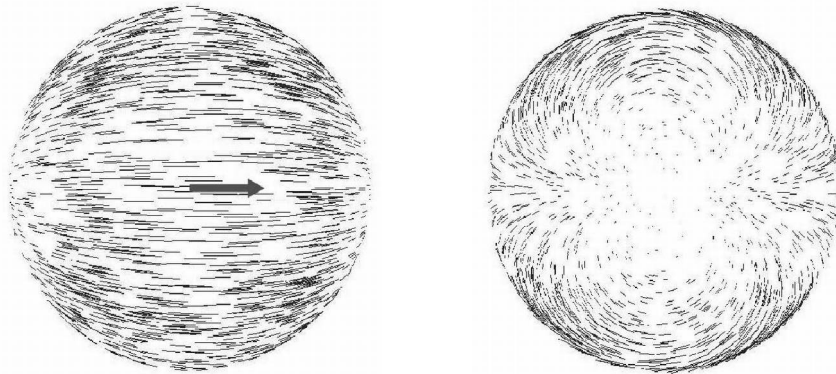


FIG. 3.4 – Champ de vecteur spline $k_V(x, \cdot)\alpha_x$. Vue de face et de dos

3.2.7 Résolution numérique du problème d'interpolation

La résolution du problème d'interpolation optimale nécessite l'inversion d'un système linéaire de dimension $2n$. L'écriture de la matrice associée à ce système demanderait de travailler avec des coordonnées locales comme celles données par les projections stéréographiques aux pôles nord et sud. Cependant nous avons vu que l'opérateur noyau se calcule de manière directe en coordonnées cartésiennes. En choisissant un algorithme de gradient conjugué on évite l'écriture de la matrice du système, et par conséquent il devient possible d'utiliser une représentation cartésienne pour points et vecteurs tangents.

La figure 3.5 visualise le résultat d'une interpolation avec $n = 4$ directions spécifiées γ_i . Les vecteurs γ_i sont représentés par les flèches.

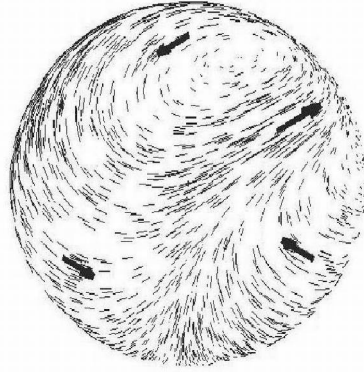


FIG. 3.5 – Solution du problème d'interpolation avec $n = 4$

3.3 Appariement de points sur une variété

L'interpolation de champs de vecteurs présentée auparavant va à présent être utilisée pour définir le problème de l'appariement de points sur la variété M .

3.3.1 Formulation en termes de géodésiques

Définition 10 a) L'espace de Sobolev $H^1([0, 1], M_\star^n)$ est l'ensemble des chemins $(\mathbf{x}_t) : [0, 1] \rightarrow M_\star^n$ localement H^1 sur chaque carte de la variété M_\star^n (cf. [35], p.236). La dérivée temporelle $\dot{\mathbf{x}}_t$ de \mathbf{x}_t est un champ de vecteurs le long du chemin (\mathbf{x}_t) défini pour presque tout $t \in [0, 1]$ et de carré intégrable.

b) Pour $(\mathbf{x}_t) \in H^1([0, 1], M_\star^n)$ et $\sigma \geq 0$ fixés, l'énergie de la courbe (\mathbf{x}_t) associée à la métrique $g_{V,\sigma}$ est donnée par :

$$E_{g_{V,\sigma}}((\mathbf{x}_t)) = \int_0^1 |\dot{\mathbf{x}}_t|_{g_{V,\sigma}}^2 dt.$$

Une **géodésique minimisante** entre les points \mathbf{x} et \mathbf{y} sur la variété (M_\star^n, g_σ) est un chemin $(\mathbf{x}_t) \in H^1([0, 1], M_\star^n)$ avec $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}$ et $E_{g_{V,\sigma}}((\mathbf{x}_t))$ minimal.

Le problème d'appariement de n points distincts sur la variété M^n consiste alors à rechercher une géodésique sur (M_\star^n, g_σ) . Le cas $\sigma = 0$ correspond à un appariement exact.

3.3.2 Difféomorphisme optimal et équivalence des deux approches

La construction du groupe de difféomorphismes associé à l'espace de champs de vecteurs V suit exactement les mêmes lignes dans le cas d'une variété compacte que dans le cadre euclidien présenté au chapitre 1. Nous renvoyons à [49] pour une présentation complète.

Définition 11 $L^2([0, 1], V)$ est l'espace des applications mesurables $t \mapsto v_t$ de $[0, 1]$ dans V telles que

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt < \infty.$$

Proposition 30 Soit $v \in L^2([0, 1], V)$. Pour tout $x \in M$, l'équation différentielle $\dot{x}_t = x + \int_0^t v_s(x_s) ds$ avec la condition initiale $x_0 = x$ possède une solution unique notée $\phi_t^v(x)$ et appelée **flot** de v .

Pour $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in M_\star^n$ nous notons $\phi_t^u(\mathbf{x}) = (\phi_t^u(x^1), \dots, \phi_t^u(x^n))$. Alors l'application $\phi^v(\mathbf{x}) : t \mapsto \phi_t^v(\mathbf{x})$ appartient à $H^1([0, 1], M_\star^n)$.

Le problème d'appariement de points, sous sa forme exacte ou relaxée, se formule de la manière suivante :

Définition 12 (Appariement exact) Soient $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in M_\star^n$ (points sources), et $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in M_\star^n$ (points cibles). Le problème d'appariement exact de \mathbf{x} sur \mathbf{y} consiste à trouver $v \in L^2([0, 1], V)$ tel que

$$(LM) \quad \begin{cases} \phi_1^v(x^i) = y^i & 1 \leq i \leq n \\ \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt & \text{est minimal.} \end{cases}$$

Définition 13 (Appariement relaxé) Soient $\sigma > 0$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_\star^n$. Le problème d'appariement relaxé de \mathbf{x} sur \mathbf{y} consiste à trouver $v \in L^2([0, 1], V)$ et $(\mathbf{x}_t) \in H^1([0, 1], M_\star^n)$ tels que

$$(\sigma LM) \quad \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 |\dot{x}_t^i - v_t(x^i)|^2 dt \quad \text{est minimal.}$$

Remarquons que dans la dernière définition la minimisation s'effectue sur les champs v_t et les chemins (\mathbf{x}_t) . Tout ceci est justifié par le théorème suivant :

Théorème 15 Soit $\sigma > 0$ (resp. $\sigma = 0$), $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_\star^n$, et supposons que (\mathbf{x}_t) est une géodésique minimisante entre \mathbf{x} et \mathbf{y} sur la variété (M_\star^n, g_σ) . Alors le champ v^* obtenu par interpolation de $\dot{\mathbf{x}}_t$ ($v_t^*(\mathbf{x}_t) = \dot{\mathbf{x}}_t$ et $\|v_t^*\|_V$ minimal) appartient à $L^2([0, 1], V)$ et est solution de (σLM) (resp. (LM)).

Preuve. Le chemin (\mathbf{x}_t) appartient à $H^1([0, 1], M_\star^n)$ donc la dérivée temporelle \dot{x}_t et donc v_t^* sont définis pour presque tout $t \in [0, 1]$. D'après la proposition 27 nous avons que

$$\int_0^1 \|v_t^*\|_V^2 dt = \int_0^1 |\dot{x}_t|_{g_{V,\sigma}}^2 dt = E_{g_{V,\sigma}}((\mathbf{x}_t)) < \infty.$$

À présent soient v champ quelconque dans $L^2([0, 1], V)$, $\mathbf{y}_t = \phi_t^v(\mathbf{x})$, et \bar{v}_t le champ interpolant \dot{y}_t . Alors pour presque tout t , nous avons $\|\bar{v}_t\|_V \leq \|v_t\|_V$ par définition de l'interpolation. Ainsi,

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt \geq \int_0^1 \|\bar{v}_t\|_V^2 dt = E_{g_{V,\sigma}}((\mathbf{y}_t)) \geq E_{g_{V,\sigma}}((\mathbf{x}_t)) = \int_0^1 \|v_t^*\|_V^2 dt,$$

puisque (\mathbf{x}_t) est une géodésique minimisante. \square

3.3.3 Appariement avec terme d'attache

Parallèlement aux deux approches vues ci-dessus, nous pouvons aussi définir l'appariement de points avec terme d'attache aux données, exprimé ici au moyen de la distance géodésique usuelle.

Définition 14 (Appariement inexact) Soient $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in M_\star^n$ (points sources), et $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in M_\star^n$ (points cibles). Le problème d'appariement inexact de \mathbf{x} sur \mathbf{y} consiste à trouver $v \in L^2([0, 1], V)$ minimisant la fonctionnelle suivante :

$$(iLM) \quad \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n d_g^2(\phi_1^v(x^i), y^i),$$

où d_g désigne la distance géodésique sur la variété (M, g) .

3.4 Application à la sphère : dérivation de la fonctionnelle et algorithme d'appariement

3.4.1 Variation de la fonctionnelle d'appariement

Nous calculons à présent la variation de la fonctionnelle J pour les appariements exact, relaxé et inexact.

Appariement inexact

Nous avons

$$J((\mathbf{x}_t)) = \lambda \int_0^1 \dot{\mathbf{x}}_t \cdot \boldsymbol{\alpha}_t dt + \sum_{i=1}^n \psi^2(y^i, x_1^i),$$

où ψ désigne la distance géodésique sur la sphère (longueur de l'arc de grand cercle). Soit $\boldsymbol{\eta}_t$ une direction de variation de \mathbf{x}_t , i.e. un élément de $T_{\mathbf{x}_t}(S^2)^n$, avec la condition $\boldsymbol{\eta}_0 = 0$. Dans ce qui suit, $\nabla_{\boldsymbol{\eta}_t}$ désigne la dérivée covariante dans la direction $\boldsymbol{\eta}_t$, et le symbole de dérivation temporelle appliqué aux vecteurs tangents $(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\eta}}_t, \dots)$ désigne la dérivation

covariante dans la direction $\dot{\mathbf{x}}_t$. Nous considérons une variation $\mathbf{x}_t^\varepsilon = (x_t^{\varepsilon,1}, \dots, x_t^{\varepsilon,n})$ de (\mathbf{x}_t) telle que $\partial_\varepsilon(\mathbf{x}_t^\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{\eta}_t$. Dans la suite, la dérivation par rapport à ε sera toujours prise en $\varepsilon = 0$. On a

$$J((\mathbf{x}_t^\varepsilon)) = \lambda \int_0^1 \dot{\mathbf{x}}_t^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\alpha}_t^\varepsilon dt + \sum_{i=1}^n \psi^2(y^i, x_1^{\varepsilon,i}).$$

$$\partial_\varepsilon J((\mathbf{x}_t^\varepsilon)) = \int_0^1 \partial_\varepsilon(\dot{\mathbf{x}}_t^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\alpha}_t^\varepsilon) dt + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \partial_\varepsilon(\psi^2(y^i, x_1^{\varepsilon,i})).$$

Or,

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon(\dot{\mathbf{x}}_t^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\alpha}_t^\varepsilon) &= \partial_\varepsilon(\dot{\mathbf{x}}_t^\varepsilon \cdot k_V(\mathbf{x}_t^\varepsilon, \mathbf{x}_t^\varepsilon)^{-1} \dot{\mathbf{x}}_t^\varepsilon) \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} \dot{\mathbf{x}}_t \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1} \dot{\mathbf{x}}_t + \dot{\mathbf{x}}_t \cdot \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} [k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1}] \dot{\mathbf{x}}_t + \dot{\mathbf{x}}_t \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} \dot{\mathbf{x}}_t \\ &= 2\dot{\boldsymbol{\eta}}_t \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1} \dot{\mathbf{x}}_t + \dot{\mathbf{x}}_t \cdot \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} [k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1}] \dot{\mathbf{x}}_t, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la symétrie de $k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1}$ et le fait que $\nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} \dot{\mathbf{x}}_t = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_t} \boldsymbol{\eta}_t = \dot{\boldsymbol{\eta}}_t$ (dérivées covariantes). Par conséquent nous avons

$$\partial_\varepsilon J(\mathbf{x}^\varepsilon) = A + B + C,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_t dt, \\ B &= \int_0^1 \dot{\mathbf{x}}_t \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_t} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1} \dot{\mathbf{x}}_t dt, \\ C &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \partial_\varepsilon(\psi^2(y^i, x_1^{\varepsilon,i})). \end{aligned}$$

Calcul de A Puisque $\boldsymbol{\eta}_0 = 0$ nous avons

$$A = 2\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1 - 2 \int_0^1 \dot{\boldsymbol{\alpha}}_t \cdot \boldsymbol{\eta}_t dt.$$

Calcul de B

$$\begin{aligned} B &= - \int_0^1 \dot{\mathbf{x}} \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t dt \\ &= - \int_0^1 k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)^{-1} \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t dt \\ &= - \int_0^1 \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t dt. \end{aligned}$$

Nous devons ici calculer la dérivée covariante du noyau k_V .

$$\begin{aligned} k_V(x, y) &= \tilde{f}_V(\cos \psi) \tilde{T}(x, y) \\ \nabla_{\eta_x} k_V(x, y) &= \tilde{f}'_V(\cos \psi) (\eta_x \cdot \tilde{e}_{xy}) \tilde{T}(x, y) + \tilde{f}_V(\cos \psi) \nabla_{\eta_x} \tilde{T}(x, y). \end{aligned}$$

La dérivée covariante de l'opérateur $\tilde{T}(x, y)$ s'écrit

$$(\nabla_{\eta_x} \tilde{T}(x, y)) \alpha_x = (\alpha_x \cdot \eta_x^\perp) \tilde{f}_{yx} - (\alpha_x \cdot \eta_x) \tilde{e}_{yx}.$$

Ainsi,

$$(\nabla_{\eta_x} k_V(x, y)) \alpha_x = \tilde{f}_V(\cos \psi) \left((\alpha_x \cdot \eta_x^\perp) \tilde{f}_{yx} - (\alpha_x \cdot \eta_x) \tilde{e}_{yx} \right) + (\eta_x \cdot \tilde{e}_{xy}) \tilde{f}'_V(\cos \psi) \tilde{T}(x, y).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} B &= -2 \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (\eta_t^i \cdot (\nabla_1 k_V(x^i, x^j) \alpha_t^i)^T \alpha_j) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \eta_t^i \cdot \beta_t^i(\alpha) dt \end{aligned}$$

avec

$$\beta_t^i(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^n \left(\tilde{f}_V(\cos \psi_{ij}) R(\tilde{e}_{ji}, \alpha_t^i) \alpha_j - \tilde{f}'_V(\cos \psi_{ij}) (\alpha_j \cdot \tilde{T}_{ij} \alpha_t^i) \tilde{e}_{ij} \right). \quad (3.10)$$

Calcul de C

$$C = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \partial_\varepsilon (\psi^2(y^i, x_1^{\varepsilon, n})).$$

Nous avons $\psi(x, y) = \text{Arccos}(x \cdot y)$, et donc

$$C = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{2\psi(y^i, x_1^i)}{\sqrt{1 - (y^i \cdot x_1^i)}} (\Pi_{x_1^i}(y^i) \cdot \tilde{x}_1^i)$$

où $\Pi_{x_1^i} y^i$ est la projection de $y^i \in S^2 \subset \mathbf{R}^3$ sur $T_{x_1^i} S^2 \subset \mathbf{R}^3$ espace tangent à x_1^i .

Appariement relaxé

Nous incluons ici le cas de l'appariement exact, correspondant à $\sigma = 0$. Nous devons ici considérer des variations η_t satisfaisant les deux conditions $\eta_0 = 0$ et $\eta_1 = 0$. La variation de la fonctionnelle est

$$\partial_\varepsilon J(\mathbf{x}^\varepsilon) = A + B$$

avec

$$A = 2 \int_0^1 \alpha_t \cdot \dot{\eta}_t dt = -2 \int_0^1 \dot{\alpha}_t \cdot \eta_t dt,$$

et

$$B = - \int_0^1 \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} k_{V_\sigma}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t dt.$$

Mais comme $k_{V_\sigma}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) = k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) + \sigma^2 I$, nous avons $\nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} k_{V_\sigma}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) = \nabla_{\boldsymbol{\eta}_t} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)$, et donc la formule précédente reste valable pour B :

$$B = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_t^i \cdot \beta_t^i dt.$$

3.4.2 Gradient de la fonctionnelle

Afin d'écrire un gradient de J nous devons spécifier un produit scalaire sur l'espace des déformations infinitésimales des chemins. Puisque ceux-ci sont de régularité H^1 , nous allons choisir :

$$\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \rangle_{H^1} \doteq \int_0^1 \dot{\boldsymbol{\eta}}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_t dt.$$

Appariement inexact

Ici les variations infinitésimales $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\xi}$ sont telles que $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\xi}_0 = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \rangle_{H^1} &= \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_1 - \int_0^1 \ddot{\boldsymbol{\eta}}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_t dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{\tilde{x}}_1^i \cdot \dot{\xi}_1^i - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \ddot{\eta}_t^i \cdot \dot{\xi}_t^i dt. \end{aligned}$$

La i^e composante du gradient est alors donnée par

$$\ddot{\nabla} J(\mathbf{x})_t^i = 2\dot{\alpha}_t^i - \beta_t^i$$

avec les deux conditions extrémales

$$\begin{cases} \dot{\nabla} J(\mathbf{x})_1^i = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{2\psi(y^i, x_1^i)}{\sqrt{1-(y^i \cdot x_1^i)}} \Pi_{x_1^i}(y^i) + 2\alpha_1^i, \\ \nabla J(\mathbf{x})_0^i = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ce gradient peut être calculé par intégration numérique.

Appariement relaxé

Ici nous avons $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\xi}_0 = 0$ et $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = 0$. Nous incluons le cas de l'appariement exact ($\sigma = 0$).

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \rangle_{H^1} &= - \int_0^1 \ddot{\boldsymbol{\eta}}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_t dt \\ &= - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \ddot{\eta}_t^i \cdot \dot{\xi}_t^i dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\ddot{\nabla} J(\mathbf{x})_t^i = 2\dot{\alpha}_t^i - \beta_t^i$$

avec les deux conditions initiales

$$\begin{cases} \nabla J(\mathbf{x})_0^i = 0 \\ \ddot{\nabla} J(\mathbf{x})_0^i = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

3.4.3 Algorithme

Nous synthétisons les calculs présentés jusqu'ici en donnant l'algorithme de calcul du gradient en fonction des variables de minimisation $\mathbf{x}_t = (x_t^i)$:

Fonction Gradient(\mathbf{x}) : ∇J

- Calcul des vecteurs moments α_t^i par inversion des systèmes linéaires $k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)\boldsymbol{\alpha}_t = \dot{\mathbf{x}}_t$
- Calcul des vecteurs β_t^i via (3.10)
- Intégration de $\ddot{\nabla} J(\mathbf{x})_t = 2\dot{\alpha}_t - \beta_t$ avec les conditions extrémales (3.11) (appariement inexact) ou (3.12) (appariement relaxé).

Fin

Une fois le gradient calculé, la descente s'effectue en projetant sur la sphère les trajectoires modifiées $x_t^i - \lambda(\nabla J)_t^i$.

3.5 Résultats d'expériences

3.5.1 Exemples synthétiques

Nous présentons tout d'abord quelques résultats obtenus sur certaines configurations de points. Le but est ici simplement d'observer la forme des géodésiques sur l'espace (M_\star^n, g_0) ou (M_\star^n, g_σ) .

Nous observons bien que même dans des situations extrêmes, l'appariement est accompli et la transformation obtenue reste régulière et inversible.

Les figures 3.6 à 3.9 montrent les appariements obtenus dans des configurations avec $n = 2, 5, 10$. Sur chaque figure sont représentés les points source (cercles) et cibles (croix), les trajectoires $x_i(\cdot)$, les positions finales des points $\phi(x_i, t)$ (losanges), et la déformation d'une grille régulière sous l'action du difféomorphisme à différents instants $t \in [0, 1]$.

Les trajectoires sont initialisées par des arcs de grands cercles reliant chaque point source à sa cible. Remarquons que grâce à la seule méthode d'interpolation des champs de vecteurs,

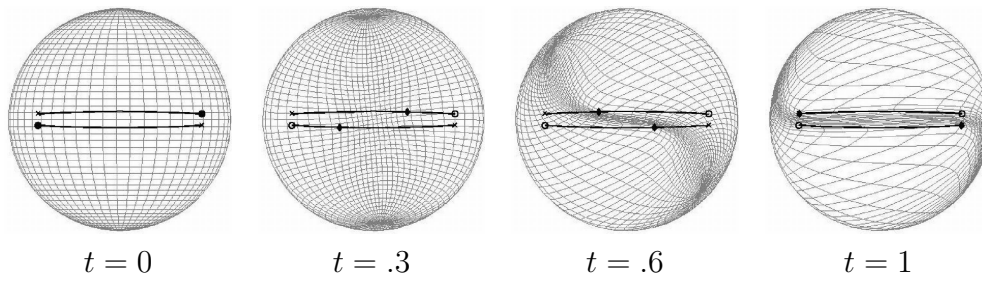
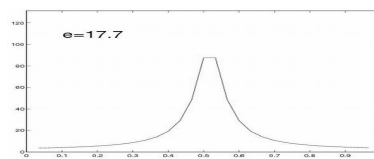
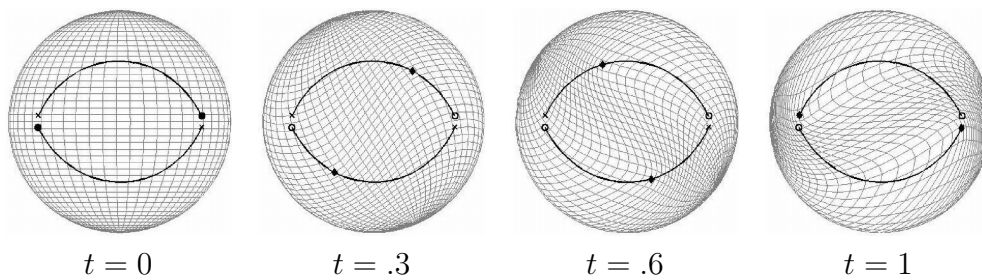
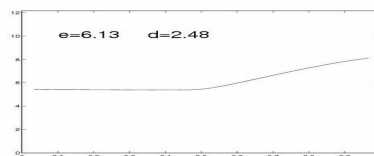
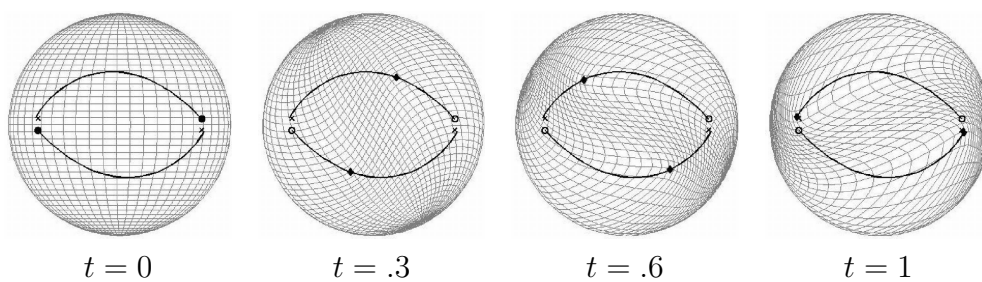
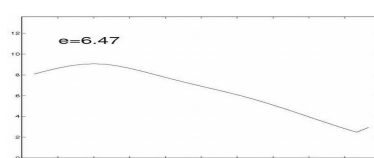
cette initialisation permet déjà d'obtenir un difféomorphisme réalisant l'appariement entre les points. Celui-ci est représenté dans les figures ("appariement initial").

Les graphiques associés à chaque expérience représentent l'énergie des champs $\|v_t\|_V$ en fonction de $t \in [0, 1]$. Comme nous l'avons vu le problème d'appariement de points peut se reformuler en termes de géodésiques sur la variété $(S^2)^n$. Par conséquent cette énergie doit être une fonction constante de t pour les appariements optimaux. Pour les méthodes (LM) et (ILM2), la racine carrée de cette valeur nous donne la distance entre les deux n -uplets de points, qui est aussi $d(Id, \varphi)$.

3.5.2 Expériences sur des images projetées du cortex

Nous présentons enfin figures 3.10 et 3.11 des expériences menées sur des données réelles d'images de la courbure du cortex cérébral projetées sur la sphère. Les points de repère sélectionnés correspondent à certains sillons (sulci) clairement identifiables dans les images source et cible, et la sélection a été réalisée à l'aide du logiciel Caret.

Ces essais ne furent pas particulièrement concluants, malgré le bon fonctionnement de l'algorithme de minimisation. L'agrandissement figure 3.11 éclaire sans doute le problème rencontré ici : certains points sélectionnés sur le premier sillon sont très rapprochés, ce qui fausse l'appariement en forçant le difféomorphisme à les séparer. Une reparamétrisation permettrait sans doute d'obtenir des points uniformément répartis le long des sillons, et donc de résoudre cette difficulté. Cependant ces expériences soulignent les limites de la méthode d'appariement de points pour traiter des problèmes qui relèvent plutôt de l'appariement de courbes, ou de bouts de courbes. C'est pour cette raison que nous avons été amené à modéliser de tels objets en tant que mesures, ce que nous exposons au chapitre 4.

*Appariement initial**Énergie $\|v_t\|_V$* *Appariement optimal exact (LM)**Énergie $\|v_t\|_V$ et distance $d = d(\varphi, Id)$* *Appariement optimal (ILM1) avec $\sigma = 0.05$* 

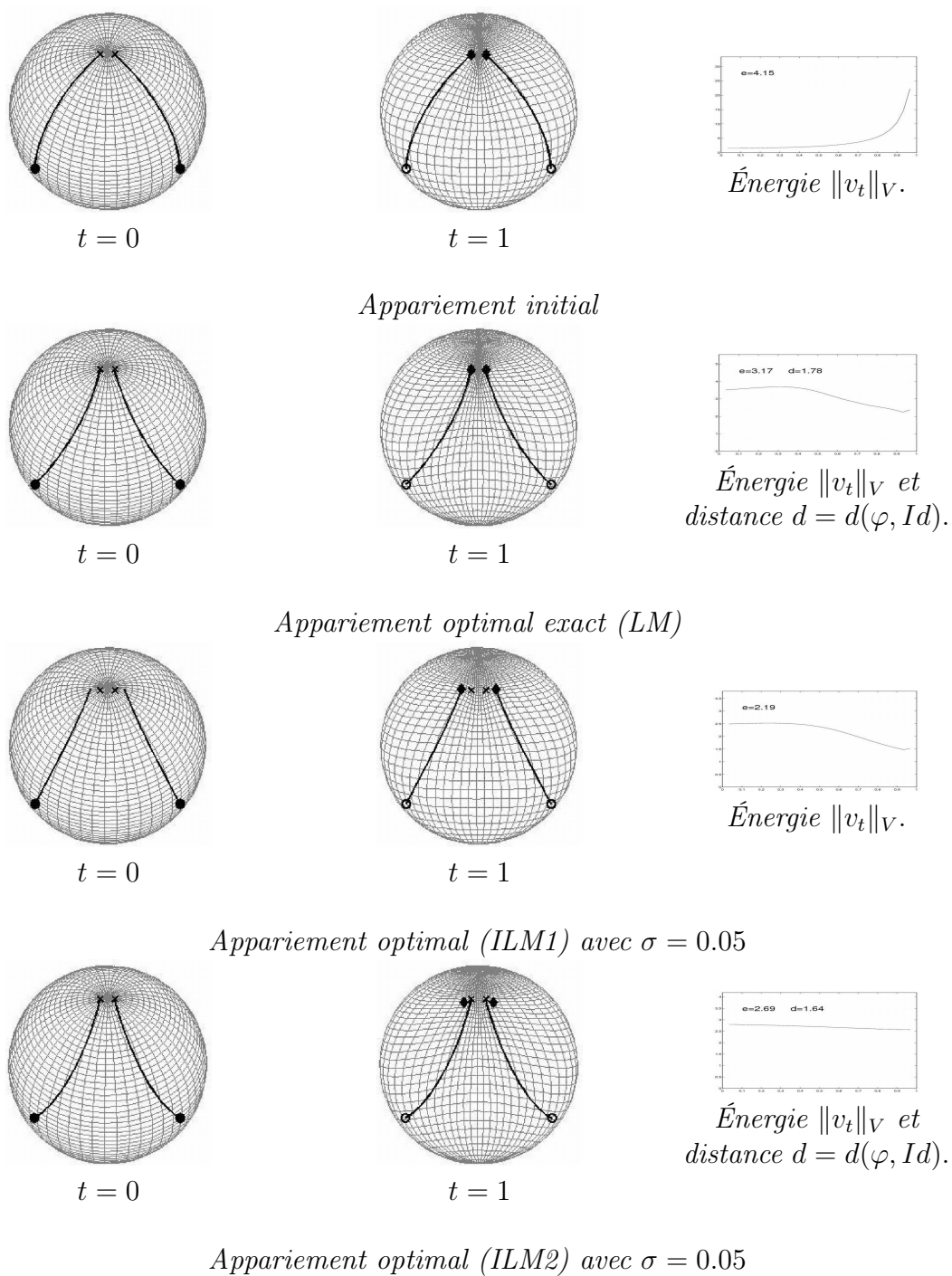
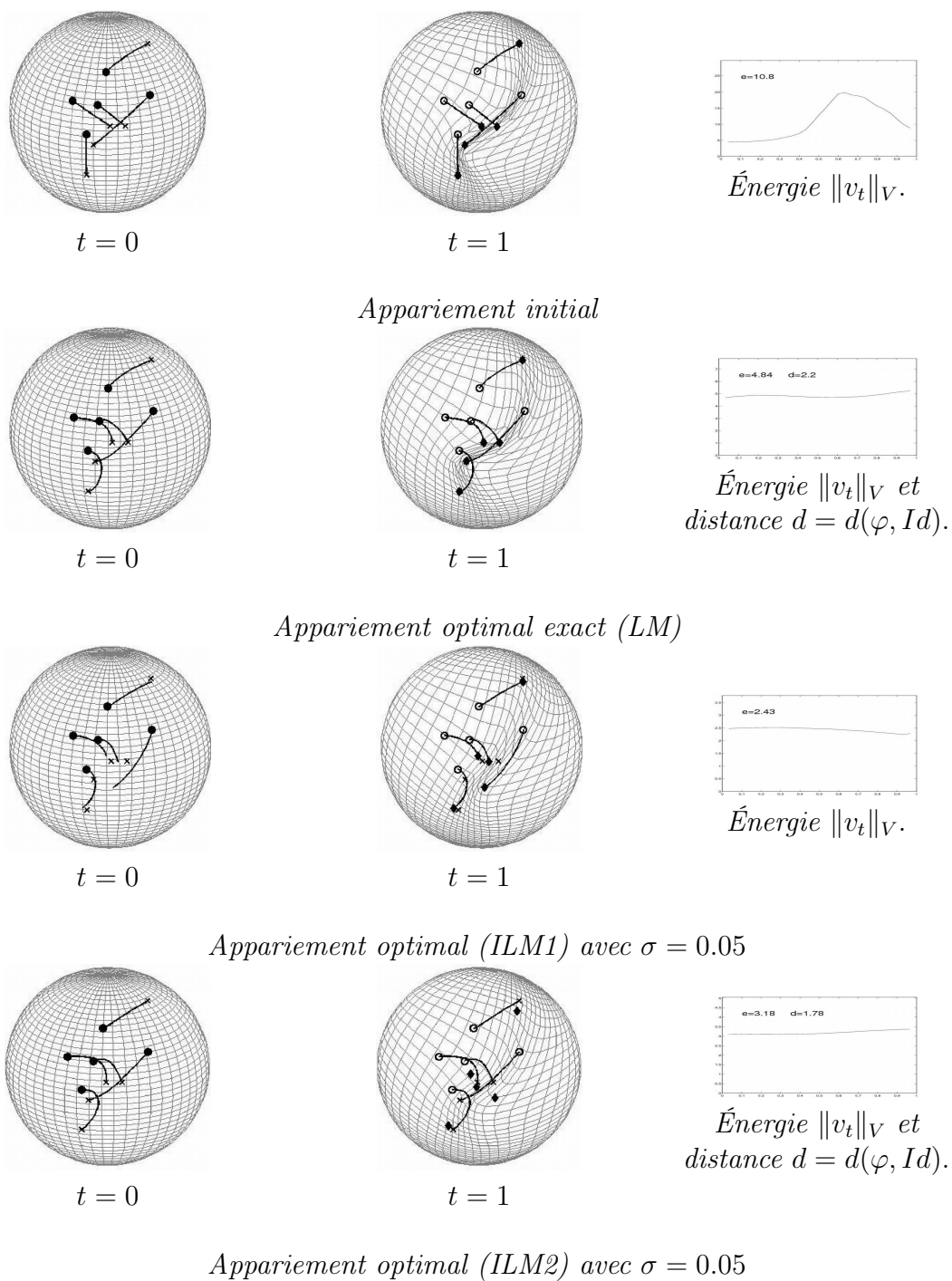


FIG. 3.7 – Expérience avec $n = 2$

FIG. 3.8 – Expérience avec $n = 5$

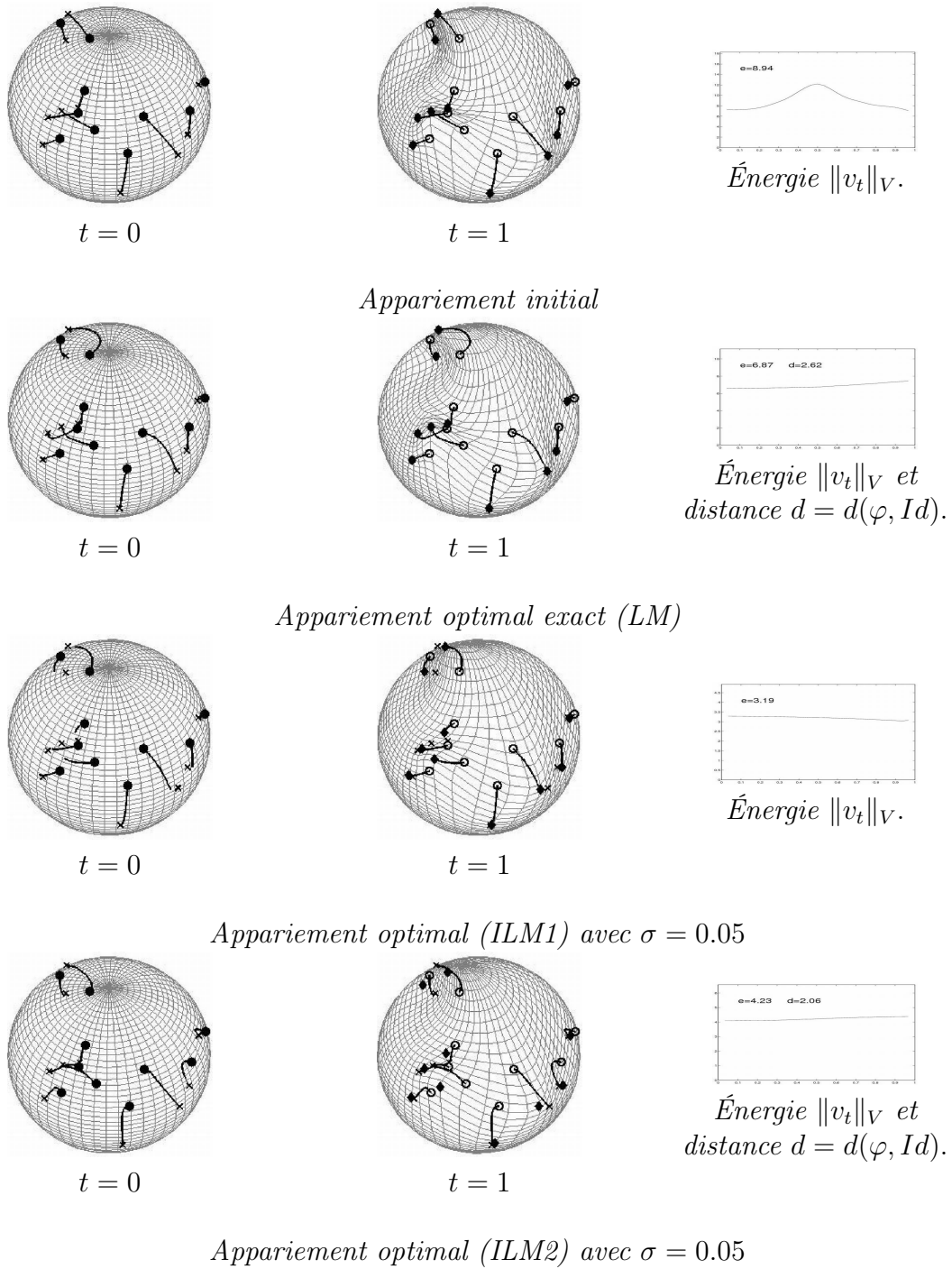


FIG. 3.9 – Expérience avec $n = 10$

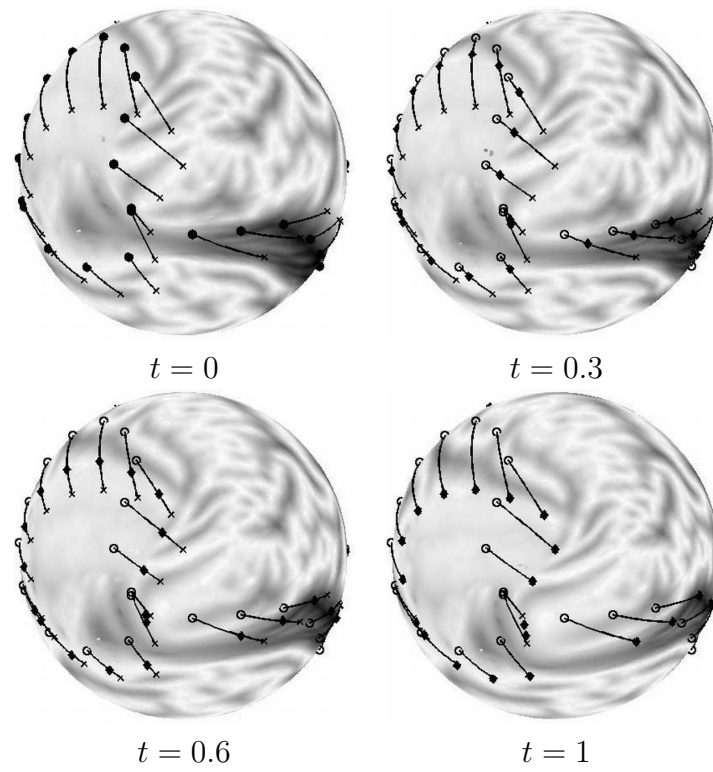


FIG. 3.10 – Expérience sur des images corticales

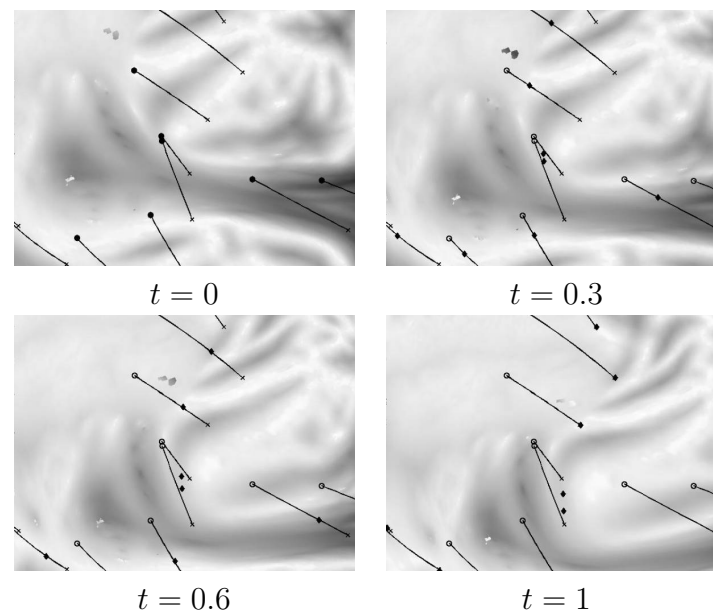


FIG. 3.11 – Expérience sur des images corticales - détail

Chapitre 4

Transport et appariement de mesures

4.1 Motivation originale : appariement de nuages de points

Le problème pratique original qui motive le présent chapitre est celui de l'appariement de nuages de points, ou appariement non-labellisé, par opposition à l'appariement classique vu en 2.2.4 où les points de référence sont associés par paire. A présent nous nous intéressons donc à des méthodes où les groupes de points source et cible sont traités de façon globale, avec en particulier la possibilité de travailler avec des nombres de points différents.

Les méthodes d'appariement de points caractéristiques sont largement utilisées dans les applications. En imagerie médicale, le protocole classique de recalage consiste à sélectionner certains points de référence (étape d'étiquetage) sur l'objet d'étude - image bi- ou tri-dimensionnelle, surface segmentée - puis à trouver la déformation optimale entre ces points et leurs correspondants sur l'atlas (objet de référence). L'objet d'étude est alors transporté via la déformation sur l'atlas. Cependant très souvent, les zones repérées dans les objets ne correspondent pas forcément à des points mais plutôt à des segments de courbes ou de surfaces comme c'est le cas pour la localisation des sulci/gyri sur le cortex. Il a été vu au chapitre 3 que l'appariement simple de points n'est pas adapté à cette situation car il nécessite d'associer les points par paires, ce qui n'est pas pertinent lorsqu'ils sont répartis sur une courbe. Il paraît donc clair que ces points doivent être traités de façon globale, c'est-à-dire en tant que nuages de points. On est donc naturellement amené à chercher une méthode d'appariement de points non-labellisés, et de manière plus théorique, à considérer le problème de l'appariement de courbes et de surfaces.

Le besoin d'une méthode d'appariement de nuages de points se fait sentir aussi dans le cas où les points ne sont plus sélectionnés sur un critère anatomique, mais sur un critère géométrique par un algorithme classique de traitement d'images : détection des bords par exemple.

4.2 Modélisation mathématique : espaces de mesures/distributions et transport de mesures

4.2.1 Mesures de Borel

Soit $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ l'espace des mesures boréliennes signées dans \mathbf{R}^d . L'espace $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ est l'espace dual de l'espace $C_0(\mathbf{R}^d)$. C'est un espace normé pour la *norme variation totale*, qui est la norme duale de la norme de $C_0(\mathbf{R}^d)$:

$$\|\mu\|_{VT} = \text{Sup} \left\{ \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu, \quad f \in C_0(\mathbf{R}^d), \quad \|f\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

L'espace $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ est un espace de modélisation approprié pour notre problème car il contient à la fois les masses de Dirac et les mesures associées aux courbes et surfaces dans \mathbf{R}^d . De plus, comme nous allons le voir maintenant, il existe une action naturelle des transformations de \mathbf{R}^d sur $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ cohérente avec l'intuition.

4.2.2 Transport de masse

L'action d'une transformation $\phi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ sur une mesure $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ se définit par dualité. Premièrement, l'action sur une fonction test $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$, que nous appellerons *transport d'image*, est donnée par la formule :

$$\phi.f = f \circ \phi^{-1}. \quad (4.1)$$

Ensuite la mesure $\phi.\mu$ est définie par

$$\int_{\mathbf{R}^d} f d(\phi.\mu) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi^{-1}.f d\mu = \int_{\mathbf{R}^d} f \circ \phi d\mu, \quad (4.2)$$

pour toute fonction test f . Cette action sur l'espace des mesures est dénommée *transport de masse* car elle conserve la masse totale de la mesure μ : $|\phi.\mu|(\mathbf{R}^d) = \|\mu\|_{VT}$. C'est une action linéaire du groupe des déformations \mathcal{A}_V sur $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$. Voyons son expression explicite dans deux cas particuliers importants :

1. Si la mesure μ admet une densité $\widehat{\mu}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, la mesure image $\phi.\mu$ admet la densité $\widehat{\phi.\mu}$ donnée par :

$$\widehat{\phi.\mu}(x) = |d_x \phi| \widehat{\mu} \circ \phi^{-1}(x),$$

action qui est bien distincte de l'action par transport d'image 4.1.

2. Si la mesure μ est une combinaison linéaire de masses ponctuelles, $\mu = \sum_{i=1}^n a^i \delta_{x^i}$, alors

$$\phi.\mu = \phi. \left(\sum_{i=1}^n a^i \delta_{x^i} \right) = \sum_{i=1}^n a^i \delta_{\phi(x^i)}.$$

En effet, l'action est linéaire, et pour une masse unique δ_x , on a pour toute fonction test f , $\int_{\mathbf{R}^d} f d(\phi.\delta_x) = \int_{\mathbf{R}^d} f \circ \phi d\delta_x = f \circ \phi(x)$, et donc $\phi.\delta_x = \delta_{\phi(x)}$. L'action introduite correspond donc bien à l'action naturelle sur les ensembles de points de \mathbf{R}^d .

4.2.3 Normes RKHS sur les mesures

Afin de pouvoir définir un terme d'appariement entre mesures, nous allons plonger $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ dans le dual d'un espace de Hilbert à noyau. Soit I un espace reproduisant scalaire sur \mathbf{R}^d qui s'injecte continûment dans $C_0(\mathbf{R}^d)$: il existe $c_I > 0$ tel que pour tout $f \in I$, $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$ et $\|f\|_\infty \leq c_I \|f\|_I$. Cette propriété assure que $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ s'injecte dans I' d'après les relations de dualité : pour $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ et $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} f d\mu \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_{VT} \leq c_I \|f\|_I \|\mu\|_{VT},$$

et donc $\|\mu\|_{I'} \leq c_I \|\mu\|_{VT}$.

L'intérêt d'introduire un espace reproduisant ici est que l'on dispose d'une formule simple pour exprimer la norme en fonction du noyau k_I , exactement de la même manière que pour la norme $\|\cdot\|_V$ de l'espace V des champs de déformations. Toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ peut être approchée (dans $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ et donc aussi dans I') par une combinaison linéaire de masses ponctuelles :

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^n a^i \delta_{x^i}, \quad a^i \in \mathbf{R}, \quad x^i \in \mathbf{R}^d.$$

Pour de telles mesures la norme duale s'écrit simplement, d'après la définition même du noyau reproduisant k_I :

$$\|\tilde{\mu}\|_{I'}^2 = \sum_{i,j=1}^n a^i a^j k_I(x^i, x^j). \quad (4.3)$$

Remarque 3 *On peut se demander ici s'il n'était pas plus simple de construire l'espace I en premier, puis de définir le transport de mesures sur l'espace I' tout entier en tant qu'action duale. La difficulté vient de ce que pour $f \in I$ quelconque et ϕ un difféomorphisme, rien n'assure que $\phi f = f \circ \phi^{-1}$ appartient à I . Cependant en choisissant $I = H^p(\mathbf{R}^d)$ pour $p \geq 1$, et si ϕ est un difféomorphisme de classe C^p , alors on peut montrer que c'est le cas et qu'il existe un polynôme P de degré p et indépendant de ϕ et f tel que*

$$\|\phi f\|_I \leq P((\phi)_{p,\infty}) \|f\|_I.$$

La construction du transport sur l'espace I' tout entier est alors envisageable. Cependant nous ne poursuivrons pas plus loin cette étude.

En vue de définir le problème d'appariement entre mesures, nous avons besoin d'un résultat de continuité de l'action par transport de masse.

Proposition 31 *Supposons que I s'injecte continûment dans $C_0^1(\mathbf{R}^d)$ et soit $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ une mesure fixée. Si ϕ^n converge vers ϕ uniformément sur le support de la mesure μ , alors $\phi^n \mu$ converge vers $\phi \mu$ dans I' .*

Preuve. Notons K le support de μ . Soit $f \in I$; d'après l'hypothèse d'injection on peut écrire

$$\begin{aligned} |\langle \phi_n \mu - \phi \mu | f \rangle| &= |\langle \mu | f \circ \phi_n - f \circ \phi \rangle| \\ &\leq \|\mu\|_{VT} \|f\|_{1,\infty} \|\phi_n - \phi\|_{K,\infty}, \end{aligned}$$

et donc d'après l'hypothèse d'injection de I ,

$$\|\phi_n \mu - \phi \mu\|_{I'} \leq c_I \|\mu\|_{VT} \|\phi_n - \phi\|_{K,\infty},$$

ce qui tend vers 0. □

4.3 Appariement de mesures

4.3.1 Définition du problème

Soient deux mesures $\mu_a, \mu_b \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$. On suppose que μ_a est à support compact. Nous nous plaçons dans le cadre général d'un problème d'appariement vu en 1.3. Nous définissons la fonctionnelle d'appariement $A : \mathcal{A}_V \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$A(\phi) = \|\phi \mu_a - \mu_b\|_{I'}^2.$$

Proposition 32 *L'application $v \mapsto A(\phi_1^v)$ est faiblement continue sur L_V^2 .*

Preuve. Ce résultat est immédiat, en combinant la propriété de continuité faible du flot (proposition 4) et la proposition 31. □

On peut donc définir le problème d'appariement suivant :

Définition 15 *Le difféomorphisme optimal sur \mathbf{R}^d pour l'appariement de μ_a et μ_b est la solution du problème d'optimisation sur V consistant à minimiser*

$$J(v) = \lambda \|v\|_{L_V^2}^2 + A(\phi_1^v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \|\phi_1^v \mu_a - \mu_b\|_{I'}^2.$$

D'après le théorème 7, on est assuré de l'existence d'un minimum et de la faible continuité de la fonctionnelle J .

4.3.2 Consistance

Nous donnons ici un résultat très important de convergence des solutions associées aux mesures empiriques discrètes pour l'appariement de deux mesures μ_a et μ_b .

Lemme 9 *Soit (μ^n) une suite bornée de mesures toutes supportées par un compact fixe, convergeant faiblement vers 0, alors μ_n tend vers 0 dans I' .*

Preuve. On peut approcher $k_I(x, y)$ à n'importe quelle précision par une combinaison linéaire de fonctions du type $f(x)g(y)$ où f et g sont bornées. On a alors

$$\begin{aligned} \|\mu^n\|_{I'}^2 &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} k_I(x, y) d\mu^n(x) d\mu^n(y) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \left(k_I(x, y) - \sum_{p=1}^P a_p f_p(x) f_p(y) \right) d\mu^n(x) d\mu^n(y) + \sum_{p=1}^P a_p \langle \mu | f_p \rangle \langle \mu | g_i \rangle. \end{aligned}$$

La seconde somme tendant vers 0 et la première étant arbitrairement petite, on obtient le résultat. \square

Lemme 10 *Si le noyau scalaire k_I est tel que $k_I(x, y) > 0$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$ et $\partial_1 \log k_I$ est borné sur tout compact, alors, pour tout compact K et $M > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ de support inclus dans K , et tout $v \in L_V^1$ vérifiant $\|v\|_{L_V^1} \leq M$, alors $\|\phi_1^v \mu\|_{I'} \leq C \|\mu\|_{I'}$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|\phi_t^v \mu\|_{I'} &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} k_I(x, y) d(\phi_t^v \mu)(x) d(\phi_t^v \mu)(y) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} k_I(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y)) d\mu(x) d\mu(y) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\phi_t^v \mu\|_{I'} &= 2 \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \partial_1 [\log k_I(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y))] v_t(\phi_t^v(x)) k_I(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y)) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq c \|v_t\|_{I'} \|\phi_t^v \mu\|_{I'} \end{aligned}$$

où c est le maximum de $\partial_1 \log k_I$ sur l'ensemble des $(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y))$ pour $x, y \in K$ et $\|v\|_{L_V^1} \leq M$. Cet ensemble est compact d'après le lemme 4. On obtient donc

$$\|\phi_t^v \mu\|_{I'} \leq \|\mu\|_{I'} \exp(c \|v\|_{L_V^1}).$$

\square

Théorème 16 *Supposons que le noyau k_I vérifie $k_I(x, y) > 0$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d$ et $\partial_1 \log k_I$ borné sur tout compact. Soient μ_a et μ_b deux mesures sur \mathbf{R}^d à support borné, et supposons que la solution v^* associée au problème d'appariement de μ_a vers μ_b est unique. Soient (μ_a^n) et (μ_b^n) deux suites dans $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$ à support uniformément borné, et convergeant faiblement vers μ_a et μ_b respectivement. Alors les champs de déformation optimaux v^{*n} associés aux problèmes d'appariement de μ_a^n vers μ_b^n convergent presque sûrement dans $L^2([0, 1], V)$ vers v^* .*

Preuve. Considérons les fonctionnelles $J_n : L^2([0, 1], V) \rightarrow \mathbf{R}$ associées aux problèmes d'appariement de μ_a^n sur μ_b^n :

$$J_n(v) = \int_0^1 \|v_t\|_V dt + \lambda \|\phi_1^v \mu_a^n - \mu_b^n\|_{I'}^2.$$

Premièrement nous pouvons restreindre l'étude à un domaine borné de $L^2([0, 1], V)$. En effet les solutions v^{*n} doivent vérifier $\lambda \int_0^1 \|v_t^{*n}\|_V dt \leq J_n(0) = \|\mu_a^n - \mu_b^n\|_{I'}^2$. Or d'après le lemme 9, μ_a^n et μ_b^n convergent dans I' , et donc cette dernière expression est bornée.

En combinant les résultats des lemmes 9 et 10, on voit que pour tout v , $\phi_1^v \mu_a^n - \mu_b^n$ converge vers $\phi_1^v \mu_a - \mu_b$ dans I' , et que cette convergence est uniforme sur le domaine borné de recherche de la solution. Par conséquent $J_n(v)$ converge uniformément vers $J(v)$ sur ce domaine.

La preuve est achevée en montrant que chaque sous-suite faiblement convergente de (v^{*n}) converge vers v^* . En effet, soit (u^n) une telle sous-suite, et u sa limite. Nous avons $J_n(u^n) \leq J_n(v^*)$ et $\lim J_n(v^*) = J(v^*)$. De plus $\lim J_n(u^n) = J(u)$: en effet, $|J(u) - J_n(u^n)| \leq |J(u) - J(u^n)| + |J(u^n) - J_n(u^n)|$; le deuxième terme converge vers 0 par convergence uniforme des J_n , et le premier aussi grâce à la faible continuité de J . Finalement nous obtenons que $J(u) \leq J(v^*)$, ce qui implique $u = v^*$. \square

Supposons à présent que μ_a et μ_b sont deux mesures de probabilité, et soient x^1, \dots, x^n et y^1, \dots, y^m deux échantillons iid de lois μ_a et μ_b . Les mesures empiriques $\hat{\mu}_a^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x^i}$ et $\hat{\mu}_b^m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{y^j}$ convergent faiblement vers μ_a et μ_b presque sûrement, et leurs supports sont inclus dans les supports de μ_a et μ_b . Par conséquent on peut leur appliquer le théorème précédent et en déduire que les champs de déformation optimaux v^{*nm} associés aux problèmes d'appariement de $\hat{\mu}_a^n$ vers $\hat{\mu}_b^m$ convergent presque sûrement dans $L^2([0, 1], V)$ vers v^* lorsque $m, n \rightarrow \infty$.

4.3.3 Variation du terme d'appariement

Dans cette partie nous supposons que I s'injecte dans l'espace $C_0^1(\mathbf{R}^d)$. Soient μ_a, μ_b deux mesures de Borel dans \mathbf{R}^d , avec μ_a à support borné, et $v, \tilde{v} \in L^2([0, 1], V)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Nous devons calculer la variation du terme d'appariement pour une variation $v^\varepsilon = v + \varepsilon \tilde{v}$

des champs de déformation. Notons $\phi_t = \phi_t^v$, $\phi_t^\varepsilon = \phi_t^{v^\varepsilon}$, puis $A^\varepsilon = A(\phi_1^\varepsilon)$. D'après la propriété de continuité du flot (théorème 4), ϕ_t^ε converge vers ϕ_t dans \mathcal{A} . Pour $x \in \mathbf{R}^d$ fixé, la variation de $\phi_1^\varepsilon(x)$ est

$$\partial_\varepsilon(\phi_1^\varepsilon(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(\phi_1^\varepsilon(x) - \phi_1(x)) = \int_0^1 d_{\phi_t(x)} \phi_{t1} \tilde{v}_t \circ \phi_t(x) dt. \quad (4.4)$$

La variation de $A^\varepsilon = \|\phi_1^\varepsilon \mu_a - \mu_b\|_I^2$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(A^\varepsilon - A) &= \frac{1}{\varepsilon} \langle (\phi_1^\varepsilon \mu_a - \mu_b) - (\phi_1 \mu_a - \mu_b), (\phi_1^\varepsilon \mu_a - \mu_b) + (\phi_1 \mu_a - \mu_b) \rangle_{I'}, \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \langle \phi_1^\varepsilon \mu_a - \phi_1 \mu_a | f + f^\varepsilon \rangle, \end{aligned}$$

où $f^\varepsilon = K_I(\phi_1^\varepsilon \mu_a - \mu_b)$. Ainsi,

$$\frac{1}{\varepsilon}(A^\varepsilon - A) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} ((f + f^\varepsilon) \circ \phi_1^\varepsilon - (f + f^\varepsilon) \circ \phi_1) d\mu_a. \quad (4.5)$$

Lemme 11

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(A^\varepsilon - A) = 2 \int_{\mathbf{R}^d} d_{\phi_1} f \partial_\varepsilon(\phi_1^\varepsilon) d\mu_a.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbf{R}^d$ fixé. Pour tout ε , il existe x^ε appartenant au segment $[\phi_1(x), \phi_1^\varepsilon(x)] \subset \mathbf{R}^d$ tel que

$$\frac{1}{\varepsilon} ((f + f^\varepsilon) \circ \phi_1^\varepsilon - (f + f^\varepsilon) \circ \phi_1) = d_{x^\varepsilon}(f + f^\varepsilon) \cdot \left(\frac{\phi_1^\varepsilon(x) - \phi_1(x)}{\varepsilon} \right).$$

La propriété de continuité (proposition 31) implique que $f^\varepsilon = K_I(\phi_1^\varepsilon \mu_a - \mu_b)$ converge vers f dans I , et puisque I s'injecte dans l'espace des fonctions de classe C^1 , nous en déduisons la convergence uniforme des différentielles df^ε vers df . Ainsi $d_{x^\varepsilon}(f + f^\varepsilon) \cdot \left(\frac{\phi_1^\varepsilon(x) - \phi_1(x)}{\varepsilon} \right)$ converge vers $2d_{\phi_1(x)} f \cdot \partial_\varepsilon(\phi_1^\varepsilon(x))$.

De plus la convergence uniforme de f^ε vers f implique que $\|f^\varepsilon\|_\infty$ reste borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée dans 4.5 pour déduire la convergence de $\frac{1}{\varepsilon}(A^\varepsilon - A)$ vers $2 \int_{\mathbf{R}^d} d_{\phi_1} f \cdot \partial_\varepsilon(\phi_1^\varepsilon) d\mu_a$. \square

Proposition 33 *La fonctionnelle $v \mapsto A \circ \phi_1^v$, de $L^2([0, 1], V)$ dans \mathbf{R} , est différentiable et son gradient satisfait, pour tout $v \in L^2([0, 1], V)$, $t \in [0, 1]$, $u \in V$,*

$$\langle (\nabla_v A)_t, u \rangle_V = 2 \int_{\mathbf{R}^d} d(f_v \circ \phi_{t1}^v) \cdot u d(\phi_t^v \mu_a), \quad (4.6)$$

où $f_v = K_I(\phi_1^v \mu_a - \mu_b)$.

Preuve. A partir de 4.4 nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (A^\varepsilon - A) &= 2 \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^1 d_{\phi_1} f_0 d_{\phi_t} \phi_{t1} \tilde{v}_t \circ \phi_t dt d\mu_a, \\ &= 2 \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} d_{\phi_t} (f \circ \phi_{t1}) \tilde{v}_t \circ \phi_t d\mu_a dt, \\ &= 2 \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} d(f \circ \phi_{t1}) \tilde{v}_t d(\phi_t \mu_a) dt. \end{aligned}$$

La forme linéaire $u \mapsto 2 \int_{\mathbf{R}^d} d(f_0 \circ \phi_{t1}) u d(\phi_t \mu_a)$ est continue dans V puisque nous pouvons écrire

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d} d(f_0 \circ \phi_{t1}) u d(\phi_t \mu_a) \right| \leq \|f\|_{1,\infty} \|\phi_{t1}\|_{1,\infty} \|\phi_t \mu_a\|_{VT} \|u\|_\infty.$$

□

4.3.4 Cas des mesures ponctuelles

Lorsque $\mu_a = \sum_{i=1}^n a^i \delta_{x^i}$ et $\mu_b = \sum_{j=1}^m b^j \delta_{y^j}$, la fonctionnelle d'attache aux données s'écrit

$$A(\phi_1^v) = \left\| \sum_{i=1}^n a^i \delta_{x_1^i} - \sum_{j=1}^m b^j \delta_{y^j} \right\|_{I'}^2,$$

où $x_1^i = \phi_1^v(x^i)$, ce qui se réécrit

$$A(\phi_1^v) = \sum_{i,j=1}^n a^i a^j k_I(x_1^i, x_1^j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a^i b^j k_I(x_1^i, y^j) + \sum_{i,j=1}^m b^i b^j k_I(y^i, y^j). \quad (4.7)$$

Le gradient s'écrit alors

$$(\nabla_v (A \circ \phi_1^v))_t(x) = 2 \sum_{i=1}^n k_V(\phi_t^v(x^i), x) \nabla(f_v \circ \phi_{t1}^v),$$

avec

$$f_v(x) = \sum_{i=1}^n a^i k_I(x_1^i, x) - \sum_{j=1}^m b^j k_I(y^j, x).$$

4.3.5 Cas des courbes

Les courbes fermées dans l'espace \mathbf{R}^d peuvent être modélisées par des éléments de $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$. Soient $\gamma_a, \gamma_b : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^d$ deux courbes fermées C^1 par morceaux (* désigne le

toire unidimensionnel). Les mesures source et cible μ_a et μ_b sont définies comme étant les mesures uniformes sur γ_a et γ_b : pour tout $g \in C_0(\mathbf{R}^d)$,

$$\mu_a(g) = \int_{\mathbf{T}} g(\gamma_a(s)) |\gamma'_a(s)| ds, \quad \mu_b(g) = \int_{\mathbf{T}} g(\gamma_b(s)) |\gamma'_b(s)| ds.$$

La mesure transportée $\phi_1^v \mu_a$ est donnée par

$$\phi_1^v \mu_a(g) = \int_{\mathbf{T}} g \circ \phi_1^v(\gamma_a(s)) |\gamma'_a(s)| ds.$$

Remarque 4 *Il est important de remarquer ici que le support de la mesure $\phi_1^v \mu_a$ est l'ensemble des points de la courbe $s \mapsto \phi_1^v(\gamma_a(s))$, mais qu'il ne s'agit pas a priori de la mesure uniforme sur ce support. Ceci vient de ce que l'action par transport de masse n'est pas géométrique. Ce défaut de la modélisation justifiera la généralisation de l'appariement de mesures aux courants, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.*

Le terme d'attache aux données s'écrit alors

$$\begin{aligned} A(\phi_1^v) &= \int_{\mathbf{T} \times \mathbf{T}} k_I(\phi_1^v(\gamma_a(s)), \phi_1^v(\gamma_a(r))) |\gamma'_a(s)| |\gamma'_a(r)| ds dr \\ &- 2 \int_{\mathbf{T} \times \mathbf{T}} k_I(\phi_1^v(\gamma_a(s)), \gamma_b(r)) |\gamma'_a(s)| |\gamma'_b(r)| ds dr + \int_{\mathbf{T} \times \mathbf{T}} k_I(\gamma_b(s), \gamma_b(r)) |\gamma'_b(s)| |\gamma'_b(r)| ds dr. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nous pourrions ici déterminer la variation de $A(\phi_1^v)$ à partir de la formule 4.6. En fait nous reviendrons en détail au chapitre 7 sur le sujet de l'appariement de courbes, à partir de concepts liés à la mécanique hamiltonienne.

4.3.6 Extension : étiquetage partiel

Nous montrons ici comment très simplement il est possible d'écrire un algorithme plus général prenant en compte la situation évoquée en introduction de ce chapitre, c'est-à-dire celle où les éléments identifiés dans l'objet ne correspondent pas seulement à des points isolés mais aussi à des groupes de points. Nous proposons alors d'identifier chaque groupe de points séparément à une somme de masses ponctuelles.

Définition 16 *Soient μ^1, \dots, μ^n et ν^1, \dots, ν^n des éléments de $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d)$. Le difféomorphisme optimal pour l'appariement de $(\mu^i)_{1 \leq i \leq n}$ vers $(\nu^i)_{1 \leq i \leq n}$ est la solution du problème d'optimisation sur L_V^2 consistant à minimiser*

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \lambda \sum_{i=1}^n \|\phi_1^v \mu^i - \nu^i\|_{L'}^2.$$

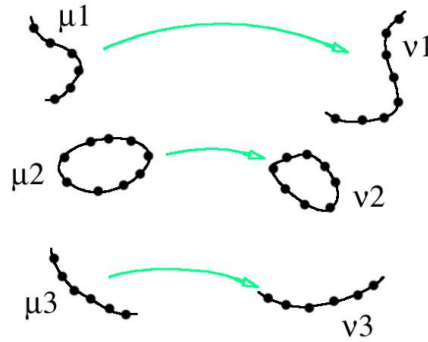


FIG. 4.1 – Étiquetage partiel

Notons qu'en pratique le choix des poids affectés aux masses ponctuelles permet d'ajuster l'importance accordée à chaque groupe.

Remarquons enfin que lorsque chacun des n groupes est constitué d'une seule masse de Dirac : $\mu^i = \delta_{x^i}$ et $\nu^i = \delta_{y^i}$, la méthode présentée ici propose une alternative à la méthode d'appariement de points (cf. 2.2.4). En effet dans ce cas la fonctionnelle s'écrit

$$A(\phi_1^v) = \sum_{i=1}^n k_I(\phi_1^v(x^i), y^i). \quad (4.9)$$

4.4 Expériences

4.4.1 Description de l'algorithme

Lorsque les mesures μ_a et μ_b sont des combinaisons linéaires de masses de Dirac, on peut directement écrire un algorithme d'appariement basé sur la minimisation de la fonctionnelle (4.7). Nous renvoyons ici au chapitre 6 pour la description de l'algorithme général d'appariement. La section 6.2.2 décrit le cas de l'appariement de mesures et le calcul du gradient du terme d'attache aux données.

4.4.2 Exemples synthétiques

Cette section présente des simulations effectuées avec un code Matlab de l'algorithme d'appariement de mesures.

La figure 4.2 montre le résultat d'un appariement entre deux paires de courbes échantillonnées. Les points source sont indiqués par des losanges, et les cibles par des étoiles. La figure de droite montre la déformation obtenue, les courbes cibles et déformées étant superposées.

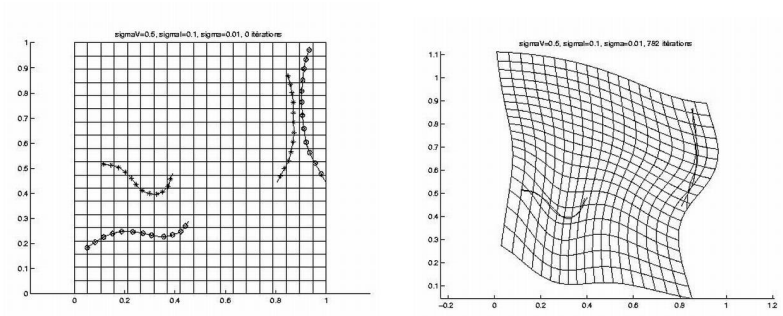


FIG. 4.2 – Expérience d'appariement de deux courbes

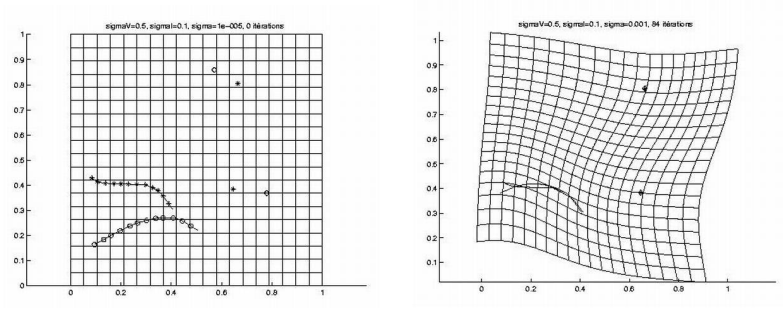


FIG. 4.3 – Expérience avec une courbe et deux points

Pour l'expérience 4.3, les données source et cible sont composées chacune de deux points et une courbe. En jouant sur les poids a^i affectés aux masses de Dirac, on peut facilement traiter correctement une telle situation (ici nous avons assigné un poids $1/3$ pour chacun des trois éléments, de sorte que les 12 points échantillonnant la courbe n'a qu'un poids de $1/36$).

L'expérience 4.4 teste la robustesse de l'algorithme vis-à-vis de la présence de points non significatifs. Chaque donnée source et cible est ici composée d'une courbe et de points ajoutés aléatoirement. On peut constater que même si le difféomorphisme global varie sensiblement d'un exemple à l'autre, l'appariement des deux courbes est toujours correctement effectué.

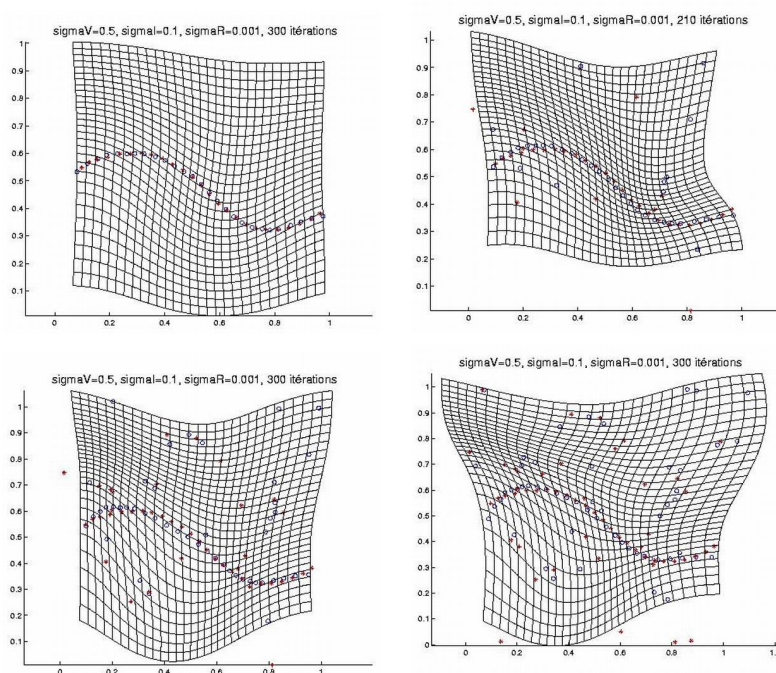


FIG. 4.4 – Robustesse vis-à-vis des données non significatives (0, 20, 40 et 60 points ajoutés aléatoirement)

Sur les figures 4.5,4.6,4.7,4.8, nous montrons une série d'expériences d'appariement d'un cercle avec une courbe déformée. Les éléments tracés sont les points échantillonnant la courbe cible, ceux de la courbe déformées et la courbe déformée elle-même.

La première figure 4.5 montre l'évolution de l'algorithme d'appariement au cours des minimisations.

La figure 4.6 montre le très bon comportement de l'algorithme vis-à-vis de variations des taux d'échantillonnages des courbes, venant confirmer le théorème de convergence de la solution 16. Le cas intéressant est lorsque la courbe source et la courbe cible ont des taux

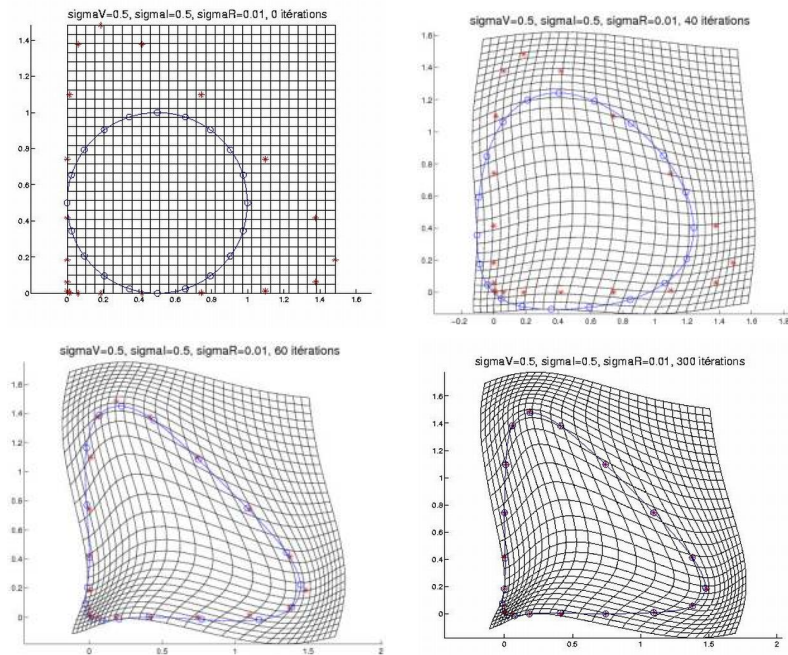
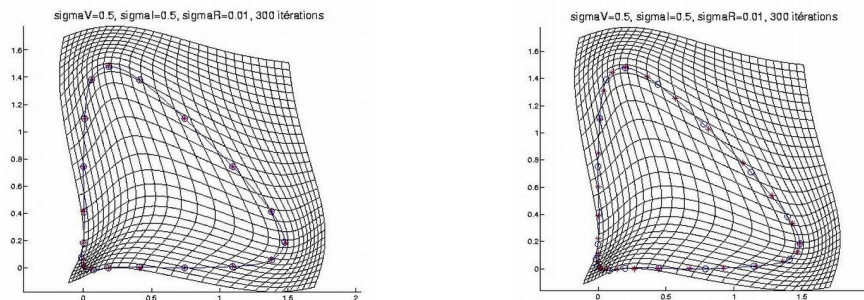
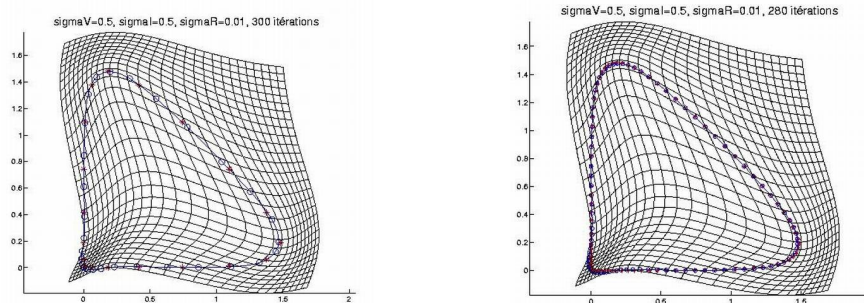


FIG. 4.5 – Évolution de la descente de gradient



taux d'échantillonnage 1/10 et 1/10 taux d'échantillonnage 1/10 et 1/7



taux d'échantillonnage 1/10 et 1/2 taux d'échantillonnage 1/2 et 1/2

FIG. 4.6 – Variation des taux d'échantillonnage

d'échantillonnage différents ; on observe alors que les points source viennent interpoler la courbe cible sans viser spécifiquement un point cible précis.

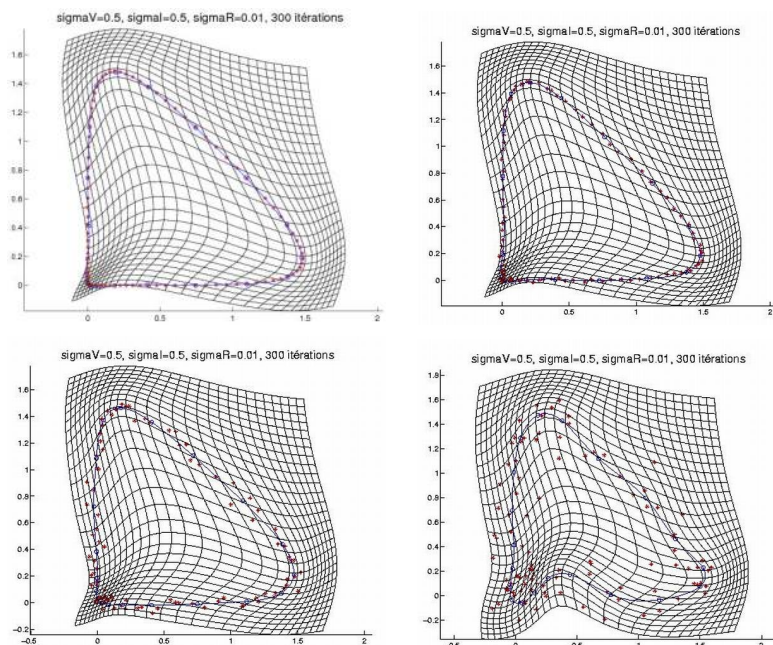


FIG. 4.7 – Expérience avec données bruitées (variances du bruit 0, 0.01, 0.03, et 0.1)

Figure 4.7, un bruit gaussien est ajouté aux positions des points cibles, avec différentes variances.

Sur la figure 4.8 nous changeons les paramètres σ_V et σ_I , et procédons avec les mêmes données bruitées. Lorsque ces paramètres décroissent, l'algorithme commence à prendre en compte les variations locales des données.

Sur la figure 4.9, l'algorithme d'appariement a été testé sur l'ensemble de données de Rangarajan, disponible sur son site internet.

4.4.3 Exemples avec données réelles

Nous avons ensuite utilisé le même algorithme pour réaliser des appariements 3D de surfaces cérébrales segmentées d'hippocampe (données LENA, hôpital Pitié-Salpêtrière). Les données fournies à l'algorithme sont uniquement les points sommets de chaque triangulation. La figure 4.10 montre l'évolution de la déformation entre un hippocampe sain et un hippocampe atteint d'Alzheimer.

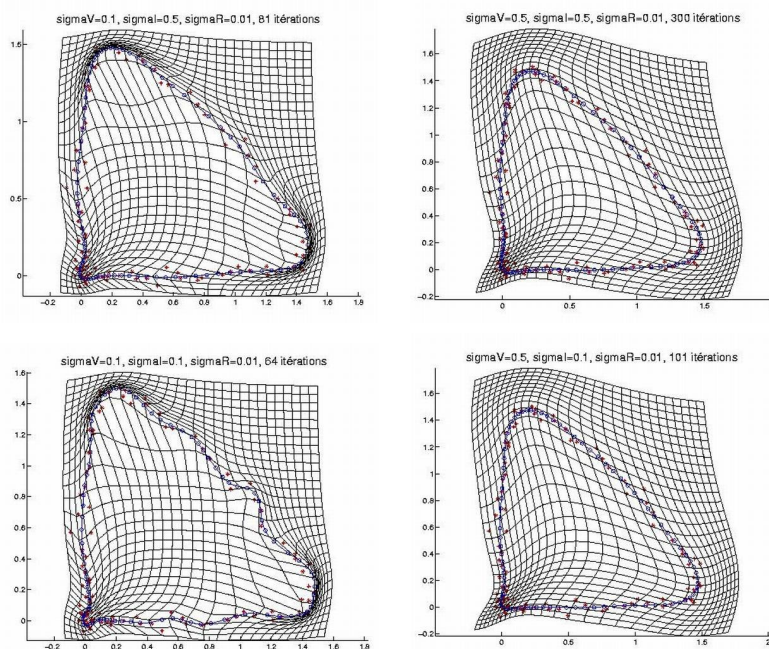


FIG. 4.8 – Comparaison de plusieurs tailles de noyaux avec données bruitées

4.4.4 Application aux histogrammes couleur

Les dernières expériences présentées montrent une application de la méthode d'appariement de mesures au transfert d'histogrammes couleurs entre deux images. Il s'agit d'une collaboration récente avec Marc Bernot et Julie Delon, au laboratoire CMLA, ENS Cachan. L'histogramme d'une image couleurs $I : \Omega \rightarrow [0, 1]^3$ est la mesure de probabilité sur $[0, 1]^3$ décrivant la distribution des couleurs. L'idée consiste à utiliser le transport de mesures pour trouver une gamme continue de transformations entre les histogrammes de deux images I_a et I_b via des difféomorphismes ϕ_t de $[0, 1]^3$. L'image transférée est alors $\phi_t \circ I_a$. Pour $t = 1$ on obtient l'image I_a avec la palette de I_b (modulo la précision de l'appariement). Pour $t = 0.5$ on obtient une palette de couleurs intermédiaire. Une telle technique peut être utilisée par exemple pour recalibrer les différentes images d'une même séquence, ou restaurer les couleurs d'un tableau, ou encore pour le mosaïquage, opération consistant à recoller plusieurs photos pour obtenir une scène panoramique.

Les figures 4.4.4 montrent les résultats obtenus pour des images de tableaux.

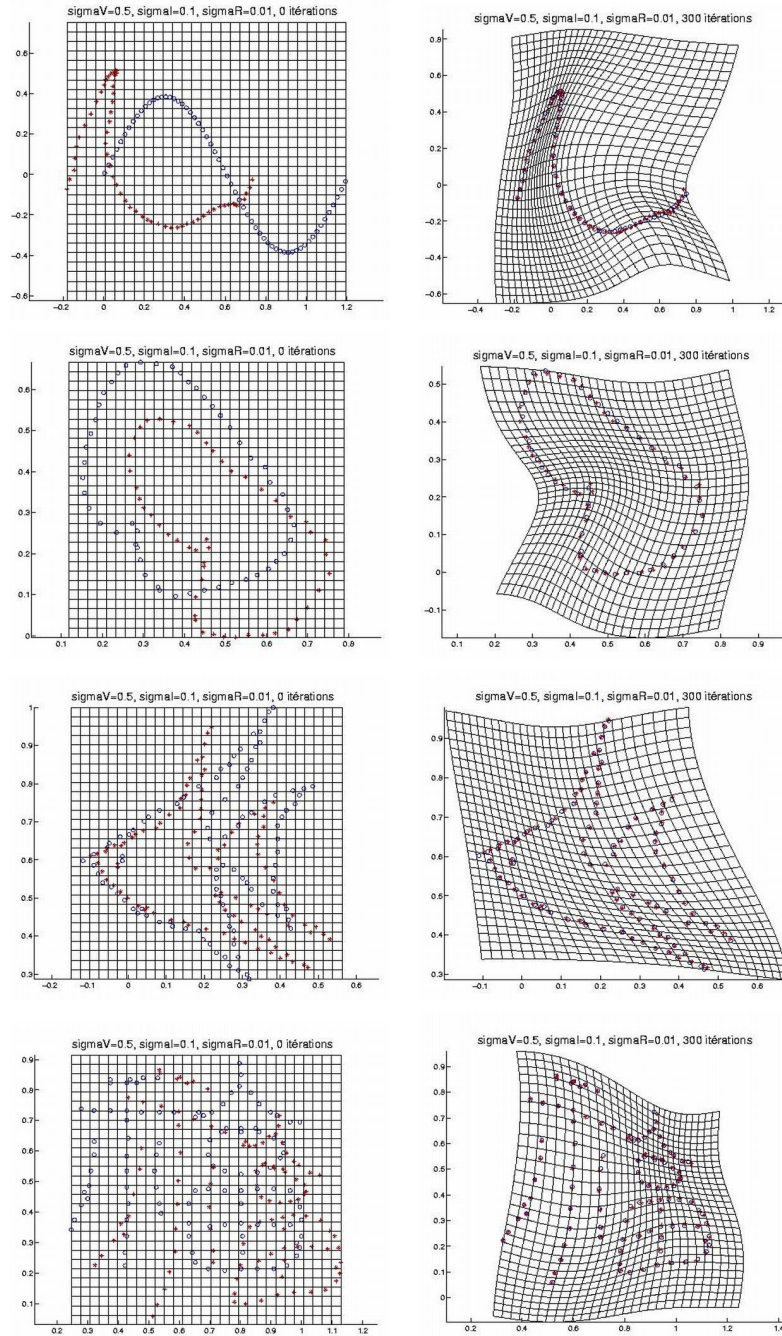


FIG. 4.9 – Expériences de Rangarajan

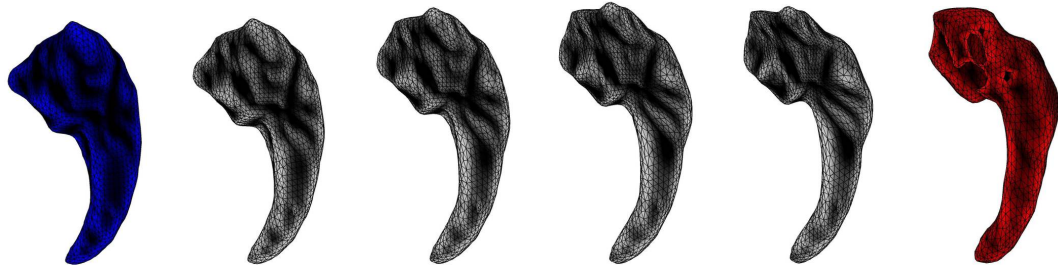


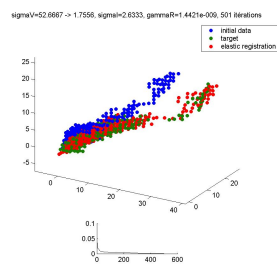
FIG. 4.10 – Expérience 3D avec des surfaces corticales d’hippocampe



Image source I_a



Image cible I_b



Appariement des histogrammes dans l’espace RGB



Image source avec palette intermédiaire $\phi_{0.5} \circ I_a$

FIG. 4.11 – Expérience de transfert de palettes

Chapitre 5

Appariement de courants

L'appariement de mesures exposé au chapitre précédent s'est avéré bien adapté à la résolution du problème d'appariement de sous-variétés plongées, tant sur le plan théorique (théorème 16) qu'expérimental. Nous allons maintenant étudier une méthode à la fois plus précise, adaptée à la dimension des variétés à apparier, et surtout géométrique, c'est-à-dire que l'action des déformations correspondra à l'action ensembliste, ce qui n'est pas le cas pour l'action sur les mesures (cf remarque 4). L'idée consiste, pour une variété S de dimension $m \leq d$, à la modéliser non plus par une mesure, mais par un courant, c'est-à-dire une mesure sur l'espace des m -formes différentielles.

5.1 Formes différentielles et courants

Les courants sont une généralisation des distributions permettant de modéliser les sous-variétés plongées dans un espace euclidien.

5.1.1 Formes multilinéaires alternées

Soit $m \in \mathbf{N}$. Une m -forme η sur \mathbf{R}^d est une application $(\mathbf{R}^d)^m \rightarrow \mathbf{R}$ multilinéaire alternée, c'est-à-dire que pour tous $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in \mathbf{R}^d$, $\eta(\alpha^1, \dots, \alpha^m) = 0$ dès que les α^i ne sont pas tous distincts. Nous noterons $\Lambda^m \mathbf{R}^d$ l'espace des m -formes sur \mathbf{R}^d . C'est un espace de dimension C_d^m , et en particulier $\dim \Lambda^0 \mathbf{R}^d = 1$ ($\Lambda^0 \mathbf{R}^d$ est identifié à \mathbf{R}), $\dim \Lambda^1 \mathbf{R}^d = d$ ($\Lambda^1 \mathbf{R}^d = (\mathbf{R}^d)'$), $\dim \Lambda^d \mathbf{R}^d = 1$ et $\dim \Lambda^m \mathbf{R}^d = 0$ pour $m > d$.

On munit $\Lambda^m \mathbf{R}^d$ d'une structure euclidienne en posant pour toute m -forme η ,

$$|\eta| = \text{Sup}_{|\alpha^i| \leq 1} \eta(\alpha^1, \dots, \alpha^m). \quad (5.1)$$

Le produit scalaire correspondant sera simplement noté “.”.

5.1.2 Formes différentielles

Une **m -forme différentielle** est une application $\omega : \mathbf{R}^d \rightarrow \Lambda^m \mathbf{R}^d$. On peut considérer différents espaces de formes différentielles, suivant la régularité que l'on souhaite. Ici nous allons considérer l'espace $C^0(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ des m -formes différentielles continues et nulles à l'infini¹. C'est un espace complet pour la norme

$$\|\omega\|_\infty = \text{Sup}_{x \in \mathbf{R}^d} |\omega(x)|. \quad (5.2)$$

5.1.3 Courants

Un **m -courant** est une forme linéaire sur un espace de m -formes différentielles. L'espace général des m -courants sur \mathbf{R}^d est défini comme le dual de l'espace des m -formes de régularité C^∞ à supports compacts, muni de la topologie appropriée, comme pour la théorie classique des distributions de Laurent Schwartz [47]. Dans la suite nous n'utiliserons pas cette notion générale de courant ; nous nous placerons dans le sous-espace $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ dual de $C_0(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$. Comme pour les mesures, nous noterons $\|\cdot\|_{VT}$ la norme duale.

Toute sous-variété S de \mathbf{R}^d de dimension m , de régularité C^1 et orientée peut être vue comme un élément de $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ grâce à la définition suivante : pour tout $x \in S$, choisissons une base orthonormée (u_x^1, \dots, u_x^m) de l'espace tangent en x à S . Alors pour toute m -forme différentielle ω , on pose :

$$S(\omega) = \int_S \omega(x)(u_x^1, \dots, u_x^m) d\sigma(x), \quad (5.3)$$

où $d\sigma$ est la forme volume canonique de la sous-variété S . Cette définition s'étend à des sous-variétés régulières par morceaux, comme par exemple des surfaces triangulées dans l'espace \mathbf{R}^3 . En fait une large classe d'ensembles géométriques, appelés ensembles rectifiables, peuvent être traités en tant que courants. [41].

Dans toute la suite nous continuerons à désigner par la même lettre les sous-variétés en tant que sous-ensembles de \mathbf{R}^d et leurs courants associés. Inversement nous dirons qu'un courant est géométrique lorsqu'il correspond à une sous-variété.

5.1.4 Représentation vectorielle

Il est commode d'utiliser une représentation vectorielle des formes multilinéaires alternées lorsque $m = d - 1$. Si η est une telle forme, son représentant satisfait :

$$\eta(\alpha^1, \dots, \alpha^m) = \bar{\eta} \cdot (\alpha^1 \times \dots \times \alpha^m) = \det(\alpha^1, \dots, \alpha^m, \bar{\eta}),$$

¹Il y a donc une légère contradiction à parler de forme différentielle puisque $x \mapsto \omega(x)$ n'est pas supposé différentiable. Néanmoins la terminologie est d'usage.

où \cdot et \times désignent le produit scalaire et le produit vectoriel euclidiens sur \mathbf{R}^d . En conséquence les $d - 1$ -formes différentielles $\omega(x)$ seront représentées par des champs de vecteurs $\bar{\omega}(x)$ via cette association. Formellement, l'association entre $d - 1$ -formes et vecteurs est donnée par l'opérateur de Hodge et la dualité (cf. [19]).

5.2 Action “push-forward”

La propriété fondamentale qui nous a poussé à introduire cette représentation des sous-variétés par des courants est qu'il est possible de définir une action d'un difféomorphisme $\phi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ sur un courant S qui coïncide, lorsque S est géométrique, avec l'action naturelle sur les sous-ensembles $S \mapsto \phi(S)$.

Définition 17 Soit $\phi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ une application différentiable, à différentielle bornée sur \mathbf{R}^d .

a) Le **pull back** d'une m -forme différentielle $\omega \in C^0(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ est la m -forme différentielle définie par :

$$\phi^\sharp \omega(x)(\alpha^1, \dots, \alpha^m) = \omega(\phi(x))((d_x \phi)\alpha^1, \dots, (d_x \phi)\alpha^m). \quad (5.4)$$

$\phi^\sharp \omega$ appartient à $C^0(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ et on a la majoration $\|\phi^\sharp \omega\|_\infty \leq \|\omega\|_\infty \|d\phi\|_\infty^m$.

b) Le **push forward** $\phi_\# S$ d'un courant $S \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ est le courant défini par

$$\phi_\# S(\omega) = S(\phi^\sharp \omega). \quad (5.5)$$

On a $\phi_\# S \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ et $\|\phi_\# S\|_{VT} \leq \|S\|_{VT} \|d\phi\|_\infty^m$.

Supposons que S est une sous-variété de \mathbf{R}^d . La formule de changement de variable pour l'intégration de formes différentielles [19] donne ici

$$S(\phi^\sharp \omega) = \phi(S)(\omega). \quad (5.6)$$

Ainsi $\phi_\# S$ correspond bien au courant associé à $\phi(S)$, ce qui est la propriété géométrique attendue.

5.2.1 Espaces normés de courants

Comme nous l'avons déjà expliqué, l'intérêt de considérer les sous-variétés comme des éléments d'un espace vectoriel est de pouvoir les comparer au travers d'une norme fonctionnelle. La machinerie des espaces reproduisants va encore une fois, comme dans le cas des mesures, nous permettre de définir un espace hilbertien de courants, dont la norme associée sera facilement calculable en pratique, et contenant toutes les sous-variétés géométriques.

Soit $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ un espace de Hilbert de m -formes différentielles s'injectant continûment dans l'espace $C_0(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\omega\|_\infty \leq c\|\omega\|_W$ pour tout $\omega \in W$. Si S est une sous-variété de dimension m , nous avons

$$|S(\omega)| \leq \int_S |\omega(x)| d\sigma(x) \leq \sigma(S) c \|\omega\|_W.$$

Par conséquent $S \in W'$, et nous pouvons donc comparer les sous-variétés entre elles à travers la norme duale sur W' .

La propriété d'injection implique que W est un espace reproduisant, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et $\eta \in \Lambda^m \mathbf{R}^d$, la forme évaluation associée, $\delta_x^\eta : C_0(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$, définie par $\delta_x^\eta(\omega) = \omega(x) \cdot \eta$ est continue. Le noyau reproduisant k_W associé est défini par la formule :

$$k_W(x, y)\eta = (K_W \delta_x^\eta)(y).$$

Remarquons que $k_W(x, y) \in \mathcal{L}(\Lambda^m \mathbf{R}^d)$. Nous sommes en fait dans un cadre un peu différent que celui envisagé dans la définition des espaces reproduisants, puisqu'ici il s'agit de fonctions à valeurs dans $\Lambda^m \mathbf{R}^d$. Cependant la structure particulière de cet espace ne joue aucun rôle pour la définition de l'espace reproduisant W ; seule compte la structure euclidienne de $\Lambda^m \mathbf{R}^d$. Dans le cas où $m = d - 1$, nous pouvons en outre définir, via la représentation vectorielle vue plus haut, un noyau à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^d)$, que nous noterons aussi k_W pour ne pas compliquer les notations. Ce noyau est défini par $k_W(x, y)\bar{\eta} = \bar{\xi}$ où $\xi = k_W(x, y)\eta$.

À présent nous voyons le résultat de continuité de l'action push-forward qui nous sera nécessaire pour définir l'appariement de deux courants.

Proposition 34 *Supposons que W s'injecte continûment dans $C_0^1(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$. Soit $S \in \mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ fixé. Si ϕ^n et $d\phi^n$ convergent uniformément vers ϕ et $d\phi$ sur le support de S , alors $\phi_\#^n S$ converge vers $\phi_\# S$ dans W' .*

Preuve. Notons K le support de S . Soit $\omega \in W$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} |(\phi_\#^n S - \phi_\# S)(\omega)| &= |S(\phi^{n\#}\omega - \phi^\#\omega)| \\ &\leq \|S\|_{VT} \|\phi^{n\#}\omega - \phi^\#\omega\|_{K, \infty}. \end{aligned}$$

Or pour $x \in \mathbf{R}^d$ et $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in \mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned} &(\phi^{n\#}\omega - \phi^\#\omega)(x)(\alpha^1, \dots, \alpha^m) \\ &= \omega(\phi^n(x))(d_x \phi^n \alpha^1, \dots, d_x \phi^n \alpha^m) - \omega(\phi(x))(d_x \phi \alpha^1, \dots, d_x \phi \alpha^m) \\ &= \sum_{i=1}^m \omega(\phi^n(x))(d_x \phi^n \alpha^1, \dots, (d_x \phi^n - d_x \phi) \alpha^i, \dots, d_x \phi \alpha^m) \\ &\quad + (\omega(\phi^n(x)) - \omega(\phi(x)))(d_x \phi \alpha^1, \dots, d_x \phi \alpha^m). \end{aligned}$$

On obtient donc la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\phi^{\sharp} \omega - \phi^{\#} \omega\|_{K,\infty} &\leq m \max(\|d\phi^n\|_{K,\infty}, \|d\phi\|_{K,\infty})^{m-1} \|d\phi^n - d\phi\|_{K,\infty} \|\omega\|_{\infty} \\ &\quad + \|d\phi\|_{K,\infty}^m \|\phi^n - \phi\|_{K,\infty} \|\omega\|_{1,\infty}. \end{aligned}$$

Puisque W s'injecte dans $C_0^1(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \|\phi^{\sharp} S - \phi^{\#} S\|_{W'} &\leq m c_W \max(\|d\phi^n\|_{K,\infty}, \|d\phi\|_{K,\infty})^{m-1} \|d\phi^n - d\phi\|_{K,\infty} \\ &\quad + c_W \|d\phi\|_{K,\infty}^m \|\phi^n - \phi\|_{K,\infty}, \end{aligned}$$

ce qui tend bien vers 0. \square

5.3 Problème général de l'appariement de courants

Muni à présent d'un espace représentatif approprié W' comme décrit dans la partie précédente, nous pouvons à présent écrire un problème d'optimisation pour l'appariement de deux sous-variétés.

5.3.1 Formulation variationnelle

Soient S, T deux éléments de $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$. **On suppose que le support de S est borné.** Nous définissons l'appariement optimal ϕ^* entre deux courants S et T comme étant le difféomorphisme minimisant la fonctionnelle $J_{S,T}(\phi) \doteq \lambda d_V(\text{Id}, \phi)^2 + \|\phi_{\sharp} S - T\|_{W'}^2$. De manière équivalente nous avons $\phi^* = \phi_1^{v^*}$ où v^* minimise

$$J_{S,T}(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \|(\phi_1^v)_{\sharp} S - T\|_{W'}^2 \quad (5.7)$$

L'existence du minimum est assurée par le résultat précédent (proposition 34) et le résultat de continuité faible à l'ordre 1 (proposition 9).

5.3.2 Relation avec l'appariement de mesures

L'appariement de courants est en fait une extension de l'appariement de mesures, celui-ci correspondant au cas $m = 0$. En effet $\Lambda^0 \mathbf{R}^d = \mathbf{R}$ et l'action push-forward d'un courant coïncide dans ce cas avec le transport de masse. On peut maintenant donner une interprétation au défaut de géométrie observé pour le transport de masse (cf. remarque 4) : l'utilisation du transport de mesures pour l'appariement de sous-variétés consiste en fait à les modéliser en tant qu'objets de dimension 0. Transposée au cas des courants, cette remarque met en évidence le fait que l'espace $\mathcal{M}_s(\mathbf{R}^d, \Lambda^m \mathbf{R}^d)$ ne se limite pas du tout aux seules sous-variétés de dimension m . On pourrait songer par exemple à appairer une sous-variété (de dimension m) muni d'un champ de vecteurs sur un autre objet du même type en les modélisant par des courants unidimensionnels.

5.4 Application aux surfaces triangulées

Dans cette partie nous nous plaçons dans le cadre de surfaces plongées dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 . En pratique ces surfaces sont souvent discrétisées sous la forme de triangulations, aussi nous allons chercher à écrire un algorithme d'appariement pour de telles surfaces. La stratégie consiste à remplacer la triangulation par un courant approché dans l'espace W' directement calculable à l'aide du noyau k_W .

5.4.1 Choix de discrétisation

Soit S une surface triangulée dans \mathbf{R}^3 . Étant donné une face f de S , nous noterons f^1, f^2, f^3 ses sommets, $e^1 = f^2 - f^3, e^2 = f^3 - f^1, e^3 = f^1 - f^2$ ses côtés, $c(f) = \frac{1}{3}(f^1 + f^2 + f^3)$ son centre, et $N(f) = \frac{1}{2}(e^2 \times e^3)$ son vecteur normal de longueur égale à l'aire de f . Si ϕ_t^v est le flot d'une famille de champs $v_t \in V$, nous noterons S_t la surface triangulée dont les sommets f_t ont pour sommets $f_t^i = \phi_t^v(f^i)$, $i = 1, 2, 3$.

La représentation de S en tant que courant s'écrit :

$$S(\omega) = \sum_f \int_f \bar{\omega}(x) \cdot (u_x^1 \times u_x^2) d\sigma_f(x),$$

où σ_f est la mesure de surface sur la face f . Maintenant pour tout point x de la face f , nous approchons la valeur de ω en x par sa valeur au centre de f . Ainsi nous obtenons l'approximation

$$S(\omega) \approx \sum_f \bar{\omega}(c(f)) \cdot N(f),$$

c'est-à-dire qu'en fait nous avons approché le courant S par une somme de fonctionnelles d'évaluation :

$$\mathbf{C}(S) = \sum_f \delta_{c(f)}^{N(f)},$$

dont la norme dans l'espace W' peut se calculer facilement à l'aide du noyau reproduisant.

Vérifions que cette expression est une bonne approximation de S dans l'espace W' . Nous avons

$$(S - \mathbf{C}(S))(\omega) = \sum_f \int_f \bar{\omega}(x) \cdot (u_x^1 \times u_x^2) d\sigma_f(x) - \sum_f \bar{\omega}(c(f)) \cdot N(f).$$

Puisque $N(f) = \int_f u_x^1 \times u_x^2 d\sigma(x)$, nous avons

$$(S - \mathbf{C}(S))(\omega) = \sum_f \int_f (\bar{\omega}(x) - \bar{\omega}(c(f))) \cdot (u_x^1 \times u_x^2) d\sigma(x),$$

et donc,

$$|(S - \mathbf{C}(S))(\omega)| \leq \sum_f \int_f |\bar{\omega}(x) - \bar{\omega}(c(f))| d\sigma(x),$$

puisque $|u_x^1 \times u_x^2| = 1$. Finalement, si W s'injecte dans l'espace des formes différentielles de classe C^1 , alors les variations de $\omega \in W$ sont bornées sur tout compact et nous pouvons écrire $|\omega(x) - \omega(c(f))| \leq \|\omega\|_W |x - c(f)|$ à une constante multiplicative près. Nous trouvons

$$\|S - \mathbf{C}(S)\|_{W'} \leq \sigma(S)\delta(S),$$

où $\sigma(S)$ est l'aire de S et $\delta(S)$ le maximum de toutes les longueurs des côtés.

La métrique entre deux surfaces S et T via cette approximation est alors donnée par

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}(S) - \mathbf{C}(T)\|_{W'}^2 &= \sum_{f,g} N(f)^t k_W(c(g), c(f)) N(g) \\ &\quad - 2 \sum_{f,q} N(f)^t k_W(c(q), c(f)) N(q) \\ &\quad + \sum_{q,r} N(q)^t k_W(c(q), c(r)) N(r), \end{aligned} \quad (5.8)$$

où les lettres f, g indexent les faces de S et les q, r celles de T .

L'identité $\phi_{\#} S = \phi(S)$ nous permet de poser une alternative pour le calcul d'une valeur approchée de la surface $\phi(S)$ dans l'espace W' :

1. Approcher S par $\mathbf{C}(S)$ puis appliquer l'action "push-forward", ce qui donne $(\phi_1)_{\#} \mathbf{C}(S)$. L'expression de l'action d'un difféomorphisme ϕ sur une fonctionnelle d'évaluation δ_x^ξ est donnée par la formule :

$$\phi_{\#} \delta_x^\xi = \delta_{\phi(x)}^{\phi_{\#} \xi}, \text{ où } \phi_{\#} \xi = \det(d_x \phi) (d_x \phi^*)^{-1} \xi. \quad (5.9)$$

Le terme d'attache aux données s'écrit ici $A(\phi) = \|\phi_{\#} \mathbf{C}(S) - \mathbf{C}(T)\|_{W'}^2$, soit encore

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \sum_{f,g} (\phi_{\#} N(f)) \cdot k_W(c(g), c(f)) (\phi_{\#} N(g)) \\ &\quad - 2 \sum_{f,q} (\phi_{\#} N(f)) \cdot k_W(c(q), c(f)) N(q) \\ &\quad + \sum_{q,r} N(q)^t k_W(c(q), c(r)) N(r). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Il s'agit du vrai problème d'appariement pour les courants approchés $\mathbf{C}(S)$ et $\mathbf{C}(T)$.

2. Calculer d'abord S_1 , la surface triangulée **dont les sommets sont les images par ϕ de ceux de S** , puis calculer $\mathbf{C}(S_1)$. Le terme d'attache aux données s'écrit alors $A(\phi) = \|\mathbf{C}(S_1) - \mathbf{C}(T)\|_{W'}^2$, soit encore

$$A(\phi) = \sum_{f_1, g_1} N(f_1)^t k_W(c(g_1), c(f_1)) N(g_1) - 2 \sum_{f_1, q} N(f_1)^t k_W(c(q), c(f_1)) N(q) + \sum_{q, r} N(q)^t k_W(c(q), c(r)) N(r), \quad (5.11)$$

où les f_1, g_1 indexent les faces de S_1 , qui ont pour sommets les f_1^1, f_1^2, f_1^3 avec $f_1^i = \phi(f^i)$.

Nous avons mis en oeuvre la seconde version. L'avantage est qu'elle ne fait pas intervenir la différentielle de ϕ_1 , ce qui simplifie le calcul du gradient car le terme d'appariement s'exprime alors directement en fonction du déplacement d'un nombre fini de points. Remarquons cependant que dans ce cas une approximation supplémentaire du même ordre est faite puisque $S_1 \neq \phi_1(S)$.

5.4.2 Description de l'algorithme

Nous renvoyons ici au chapitre 6 pour la description de l'algorithme général d'appariement. La section 6.2.3 décrit le cas de l'appariement de courants et le calcul du gradient du terme d'attache aux données.

5.5 Expériences

5.5.1 Exemples synthétiques

L'algorithme a d'abord été essayé sur des configurations simples avec un petit nombre de triangles. Sur les figures, la surface source est représentée en bleu, la surface cible en vert et la surface transformée en rouge. Pour l'expérience de la figure 5.1, il s'agissait de retrouver des comportements similaires à ceux observés pour l'appariement de mesures. La surface source est composée de 10 triangles tandis que la cible n'en comporte que 3. En faisant varier le paramètre d'échelle σ_W on observe soit une interpolation de la configuration cible, soit la formation de couples source/cible appariés.

5.5.2 Expériences sur des segmentations de visages

Pour ces expériences nous avons utilisé 10 surfaces segmentées de visages muni de points de repère manuellement sélectionnés, représentés figure 5.3. Notons que ces points ne

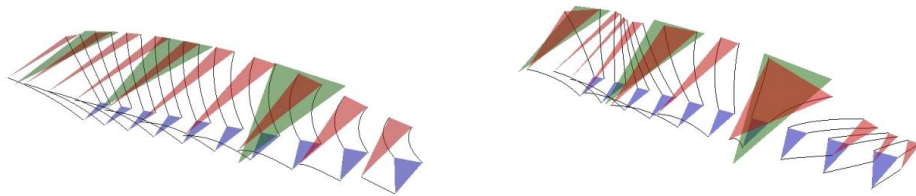


FIG. 5.1 – Appariement de courants, exemples synthétiques

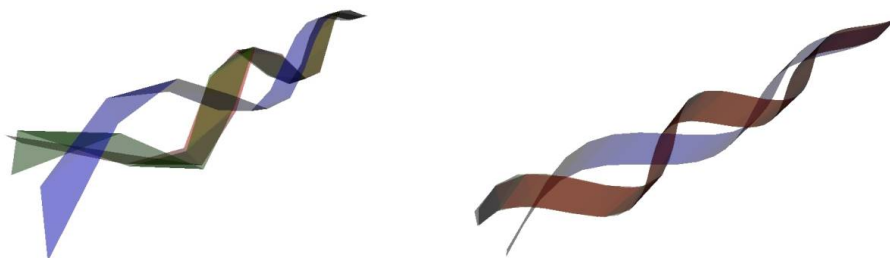


FIG. 5.2 – Appariement de courants, exemples synthétiques

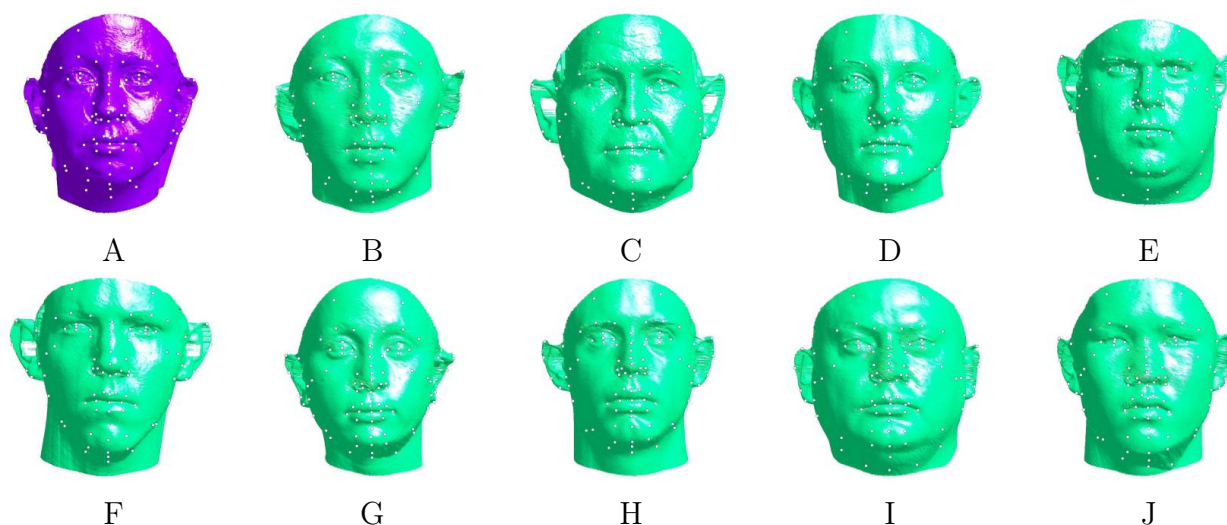


FIG. 5.3 – Les 10 surfaces segmentées de visages et leurs points de repère associés.

rentrent pas en compte dans le procédé d'appariement, nous les avons utilisé uniquement à des fins de validation. Le premier visage fut choisi comme surface source S pour être apparié sur les 9 autres. Pour chaque expérience nous avons ré-échantillonné les surfaces originales de 60000 à 5000 triangles, puis calculé la déformation optimale entre les surfaces sous-échantillonnées. Notons que pour un tel nombre de points de contrôle, les techniques numériques de calcul rapide que nous présentons au chapitre 6 sont indispensables. La figure 5.4 montre les déformations de la première surface sous l'action des difféomorphismes optimaux. La figure 5.5 montre plus en détail une expérience. La surface gauche représente le visage source, et celle du centre sa déformation. A droite est représentée la cible avec ses propres points de repère ainsi que ceux de la surface déformée. La figure 5.6-gauche montre les graphes de distances entre surfaces, avant et après la procédure d'appariement (i.e. entre S et T et entre $\phi(S)$ et T). Le graphe de gauche donne le pourcentage de sommets dont la distance à l'autre surface est inférieure à d , en fonction de la distance d . A droite est tracée le graphe de distance pour les points caractéristiques, c'est-à-dire le pourcentage de points de repère sur la cible T dont la distance à son correspondant sur S (resp. $\phi(S)$) est inférieure à d . Remarquons que l'appariement est visuellement satisfaisant, ce qui est confirmé par le graphe de distance des surfaces. Cependant, certains points de repère ne sont pas correctement appariés. On peut penser que le mode de sélection manuel de ces points de repère est parfois hasardeux ; beaucoup d'entre-eux ne correspondant pas réellement à des localisations anatomiquement bien définies.

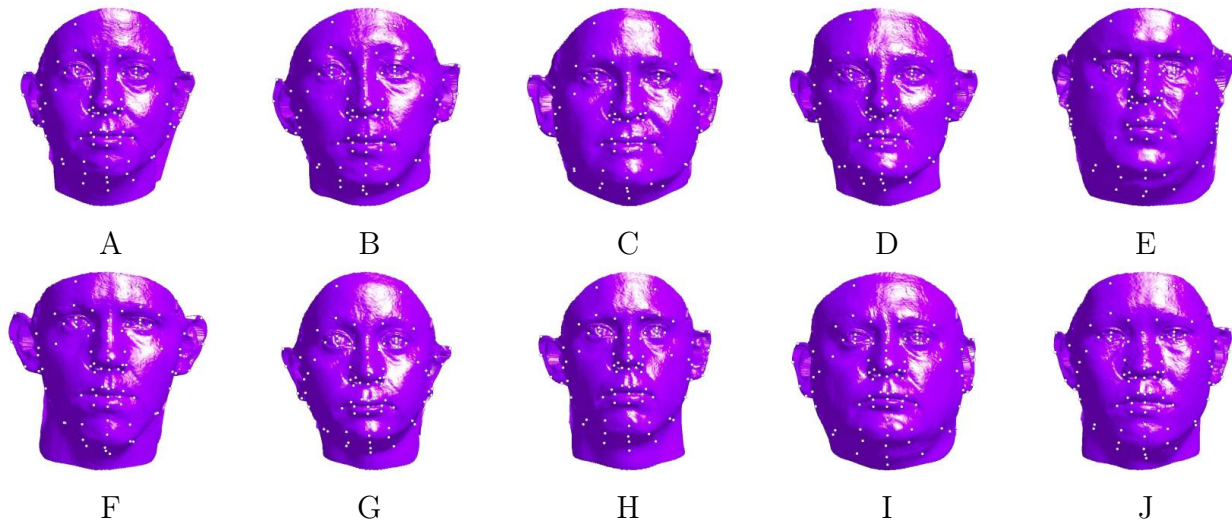


FIG. 5.4 – Déformations de la surface source A sous l'action des difféomorphismes optimaux.



FIG. 5.5 – gauche : visage original, centre : visage déformé, droite : cible.

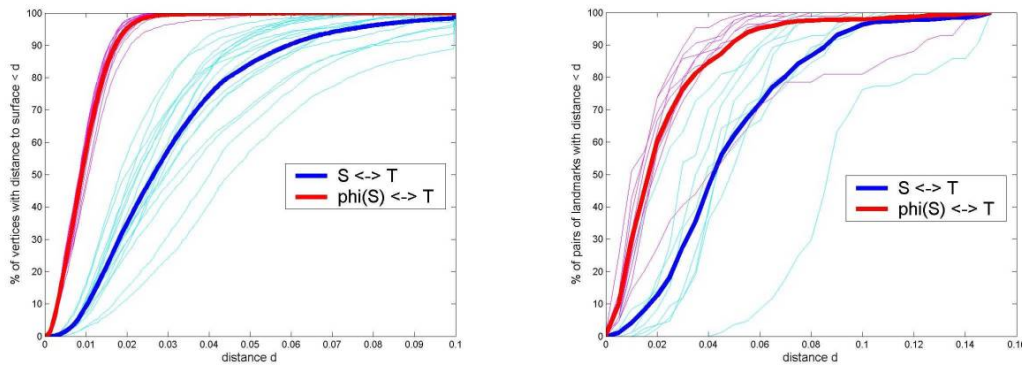


FIG. 5.6 – Expériences sur les visages : Graphes des quantiles de distances pour les sommets (gauche) et les points de repère (droite). La courbe moyenne est en gras.

5.5.3 Expériences sur les données segmentées d’hippocampes

Nous avons ensuite essayé l’algorithme d’appariement de courants à une série de 15 surfaces corticales d’hippocampes droits et gauches. Nous renvoyons à [16] pour la méthode de segmentation utilisée. Les 7 premiers sujets sont atteints de la maladie d’Alzheimer, tandis que les autres sont normaux. Dans cette expérience les surfaces étaient sous-échantillonnées à 500 triangles.

La figure 5.7 montre les 15 surfaces originales. La figure 5.8 montre les déformations de la surface source sous l’action des difféomorphismes optimaux. La figure 5.5.3 montre les histogrammes de distances pour cette série d’expériences. Remarquons que la distance est inférieure à 2mm pour une très forte proportion de sommets, ainsi que la faible variance des résultats dans cette série.

5.5.4 Expériences sur le Planum Temporale

Pour terminer nous montrons des expériences menées sur une série de surfaces segmentées de planum temporale (PT) droits et gauches venant de 17 sujets différents, 8 d’entre-eux étant atteints de troubles auditifs. Le planum temporale est une partie du cortex cérébral présentant une grande variabilité intra (asymétrie) et inter-sujets, même pour de sujets sains. Par conséquent nous avons choisi de mener deux sortes d’expériences pour cette série. Dans la première nous avons choisi une surface source et appliqué l’algorithme pour l’apparier aux 16 autres. Ceci étant fait pour les planum temporale droits et gauches indépendamment. Dans la deuxième expérience nous avons essayé de mesurer l’asymétrie intra-sujet en appariant les surfaces droites et gauches. Ainsi, pour chaque sujet, nous avons appliqué une symétrie planaire aux sommets de la surface gauche, et changé l’orientation des faces pour obtenir la surface source, tandis que la cible est le PT

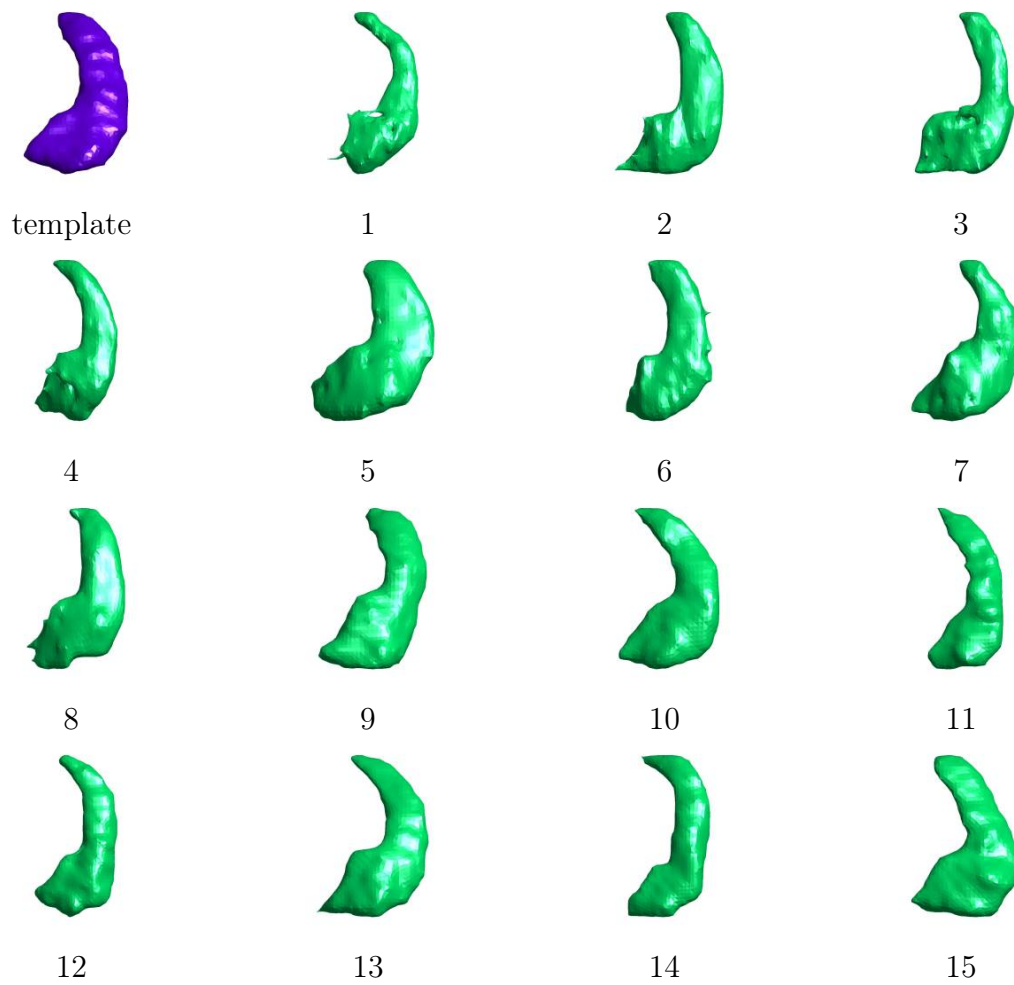


FIG. 5.7 – Les 16 hippocampes gauches.

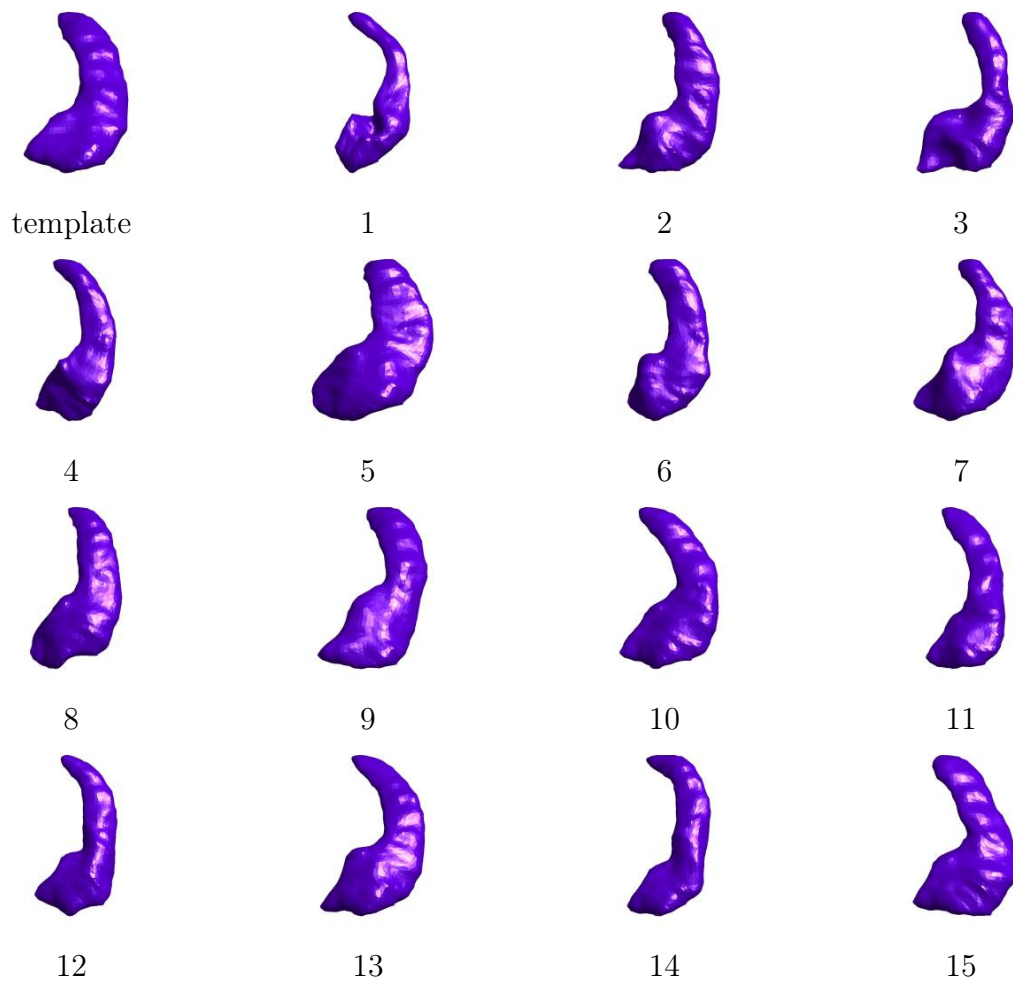


FIG. 5.8 – Déformations de la surface source obtenues après la procédure d'appariement.

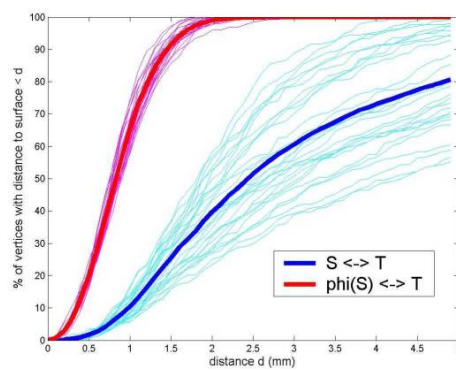


FIG. 5.9 – Histogrammes des distances pour l'expérience sur les hippocampes

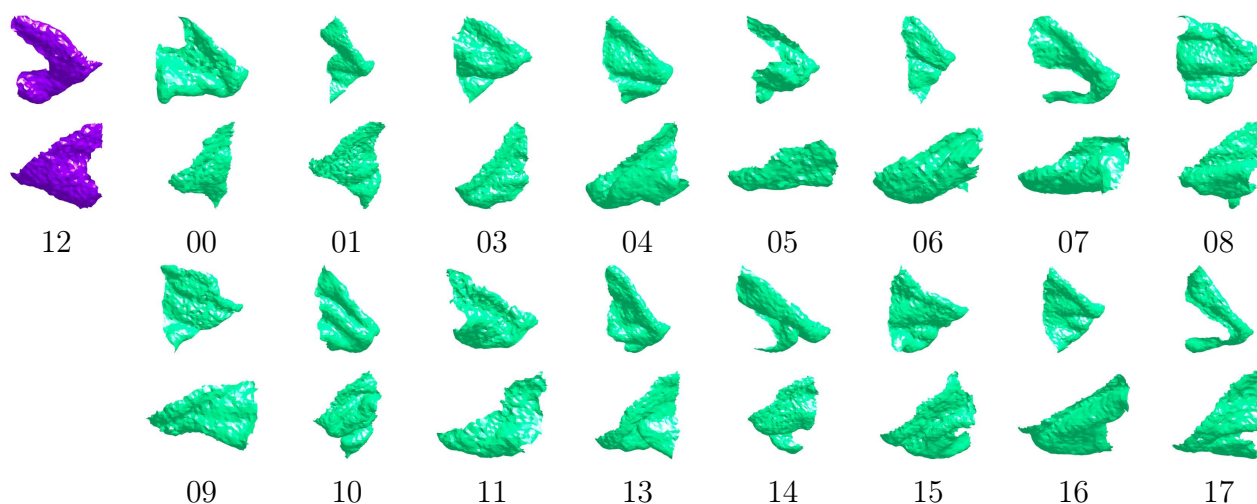


FIG. 5.10 – Les 17 planum temporale gauche (haut) et droits (bas).

droit correspondant pris tel quel. Ce procédé fournit un appariement gauche/droite. Les figures 5.13 et 5.17 montrent les histogrammes de distances pour toutes ces expériences. La performance moyenne d'appariement est bonne, comparable à celle obtenue pour les données d'hippocampes. En revanche on observe une variance assez grande. L'observation directe des recalages montre que dans certains cas les bords des deux surfaces ne sont pas correctement recalés. Pour tenter de donner une explication intuitive à ce fait, nous représentons figure 5.18 la surface source (à gauche) et deux surfaces cibles (en haut), ainsi que les déformations obtenues (en bas). Nous avons aussi sélectionnés certains points de repère sur la surface source, afin de pouvoir suivre leurs déplacements. Les points représentés sur les surfaces cibles sont donc les points de repère déplacés sous l'action du difféomorphisme. Pour le premier exemple (au centre), l'algorithme donne des correspondances en accord à ce qui aurait pu être réalisé par un expert, alors que pour le deuxième (à droite), les points *c* et *d* se retrouvent à l'intérieur de la surface, et non plus sur le bord. Cependant dans cet exemple, ces points de la surface originale ne possèdent pas de réels correspondants sur la cible, car la forme de celle-ci est entièrement différente

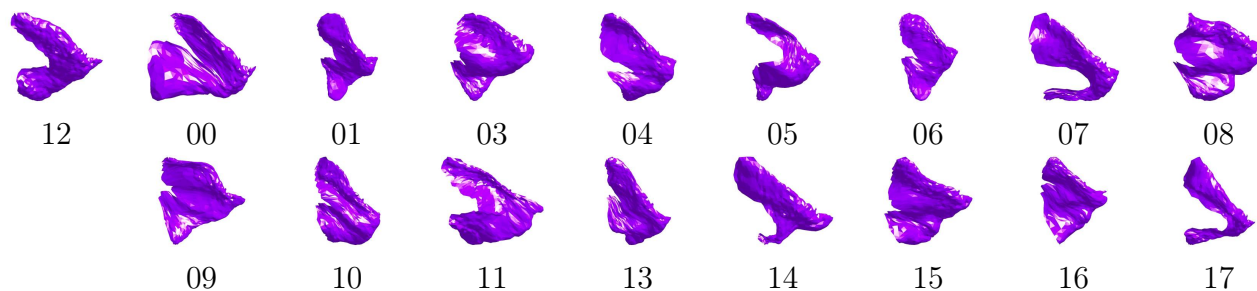


FIG. 5.11 – Expérience inter-sujets : déformations du PT 12 gauche après appariements sur les autres PT gauches.

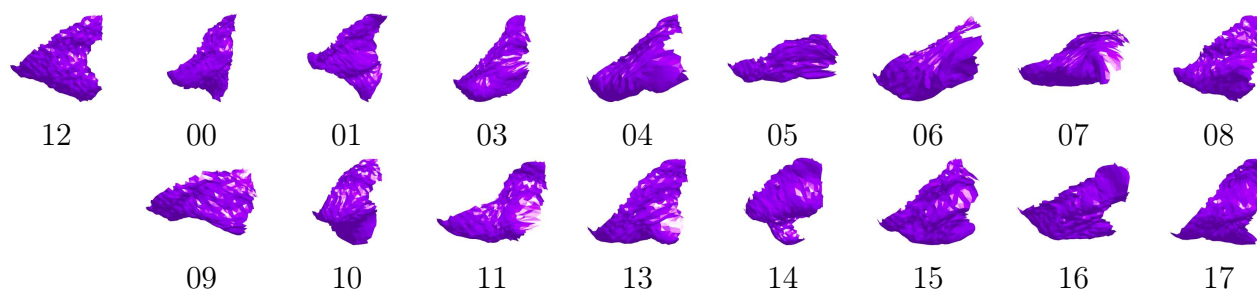


FIG. 5.12 – Expérience inter-sujets : déformations du PT 12 droit après appariements sur les autres PT droits.

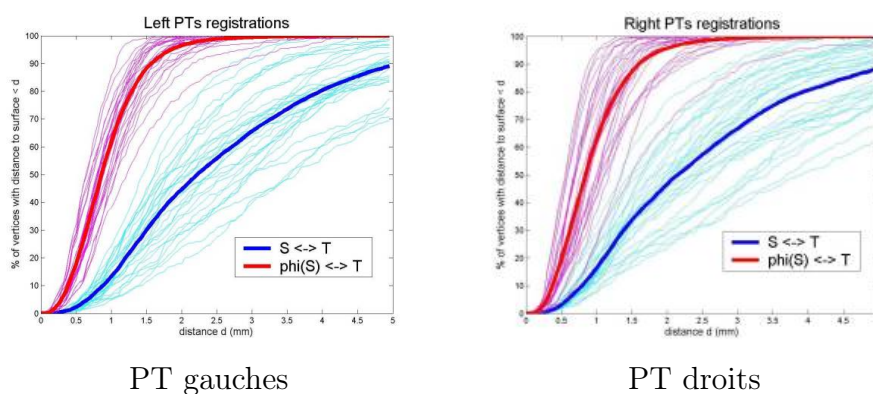


FIG. 5.13 – Histogrammes des distances pour l'expérience inter-sujets sur les planums temporale gauches et droits.

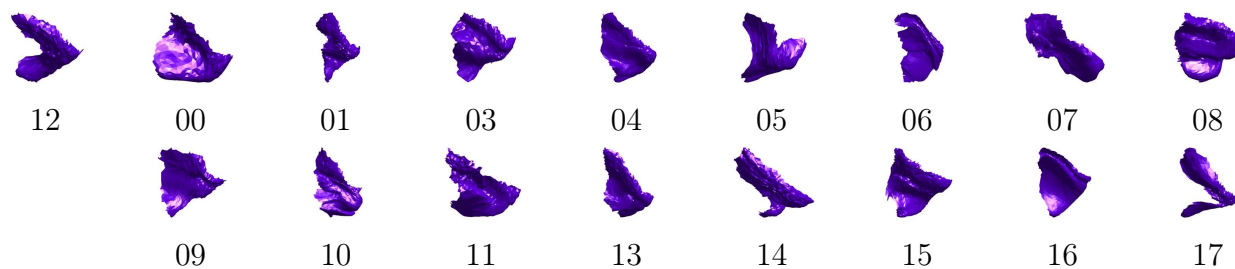


FIG. 5.14 – Expérience intra-sujets : déformations des PT droits après appariement sur les PT gauches correspondants.

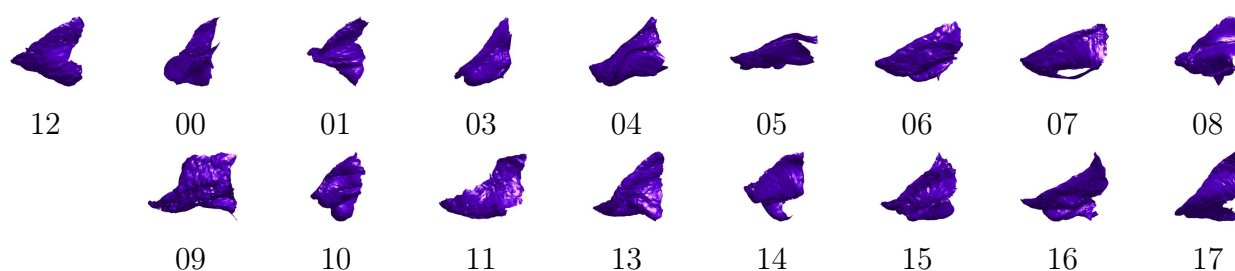


FIG. 5.15 – Expérience intra-sujets : déformations des PT gauches après appariement sur les PT droits correspondants.

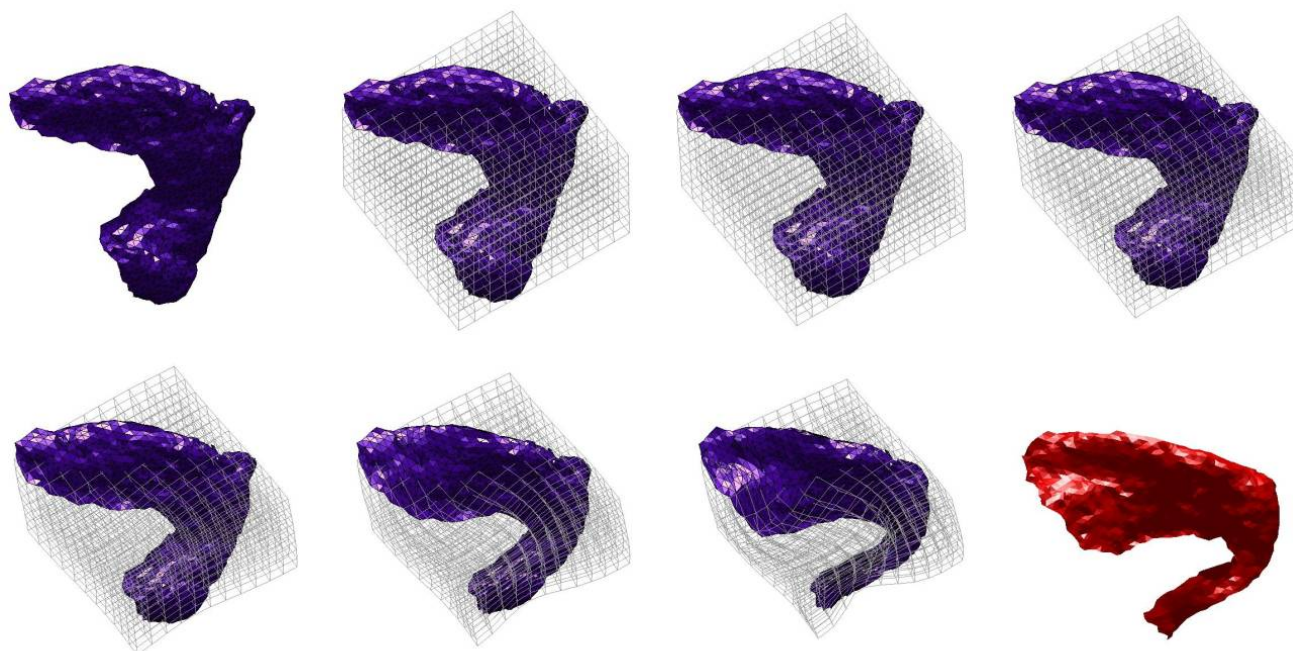


FIG. 5.16 – Déformation de la surface et d'une grille 3D, appariement 12 sur 07 gauches

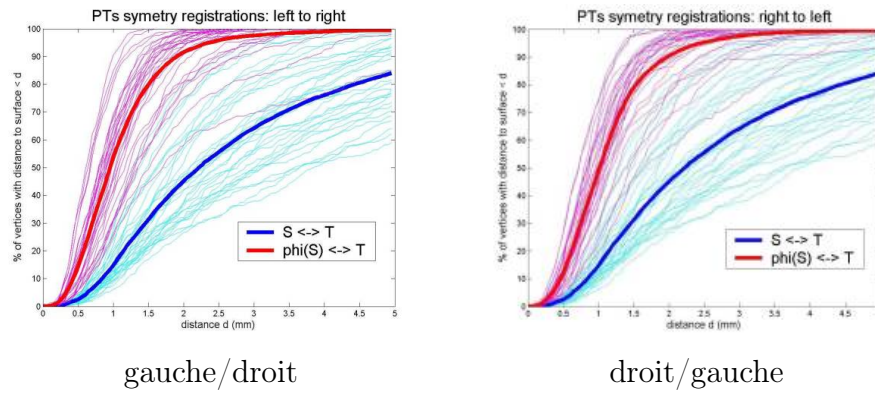


FIG. 5.17 – Histogrammes des distances pour l’expérience intra-sujets sur les planums temporale.

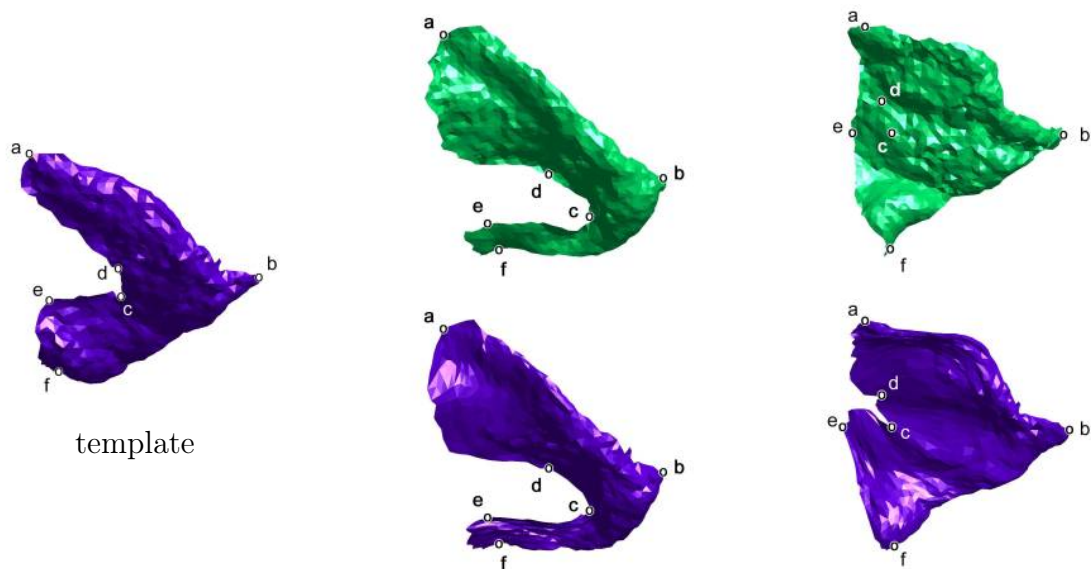


FIG. 5.18 – Expériences sur le planum temporale : correspondances entre points repérés sur la surface source.

Chapitre 6

Aspects numériques et algorithmiques des méthodes à noyaux

Le but de ce chapitre est de proposer des algorithmes efficaces pour la résolution d'un problème d'appariement générique. Le principe de réduction (théorème 12) a montré qu'une fois le problème discrétisé, la recherche de la solution peut être entreprise sur un sous-espace $L^2_{V,S}$ paramétré par les vecteurs moments α_t^i , qui deviennent donc les variables de minimisation. Le premier problème est alors de définir un gradient de la fonctionnelle vis-à-vis de ces variables, puis de proposer une méthode de descente en utilisant des schémas numériques appropriés. Le deuxième problème concerne la complexité algorithmique : en effet dans les applications, le nombre n de points de discrétisation des données peut être très important, car un ré-échantillonnage trop grand gomme des détails indispensables à l'analyse, comme l'illustre la figure 6.1. Par conséquent nous nous attacherons toujours dans l'écriture de l'algorithme à réduire le coût en temps de calcul et en place mémoire. En évitant les inversions de systèmes linéaires et en utilisant des méthodes rapides d'évaluation du noyau et de ses dérivées, il devient possible d'obtenir une complexité linéaire vis-à-vis de n pour le calcul de la fonctionnelle et du gradient.

6.1 Algorithme de descente

6.1.1 Calcul de la fonctionnelle d'appariement

Revenons à la fonctionnelle générale d'appariement (1.3) :

$$J(v) = \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + A(\phi_1^v). \quad (6.1)$$

Lorsque le terme d'attache aux données n'est fonction que du déplacement d'un nombre fini de points $x^1, \dots, x^n \in \mathbf{R}^d$, nous avons vu en 2.2.3 que les champs optimaux sont de la



FIG. 6.1 – Comparaison entre une surface triangulée et deux sous-échantillonnages

forme

$$v_t(x) = \sum_{i=1}^n k_V(x_t^i, x) \alpha_t^i = k_V(\mathbf{x}_t, x) \boldsymbol{\alpha}_t, \quad (6.2)$$

où $\mathbf{x}_t = (x_t^i)$ désigne les trajectoires des points : $x_t^i = \phi_t^v(x^i)$. Rappelons que nous utilisons la notation matricielle pour l'écriture de la fonction noyau (cf. définition 9). Les trajectoires $\mathbf{x}_t = (x_t^i)$ sont obtenues par intégration de (cf. (2.23)) :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} + \int_0^t k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \boldsymbol{\alpha}_s ds. \quad (6.3)$$

L'algorithme de calcul de la fonctionnelle peut donc se schématiser ainsi :

Fonction Fonctionnelle(α) : J
 | Calcul de \mathbf{x}_1 par intégration de (6.3)
 | Calcul de la fonctionnelle J par (6.9)
Fin

En termes de codage, les points x^i sont représentés par un tableau x de taille $d * n$, et l'intervalle temporel $[0, 1]$ est discrétisé sur une échelle de longueur T , de pas $\delta_T = \frac{1}{T-1}$. Les variables de minimisation α_t^i et les trajectoires x_t^i sont alors représentés par des tableaux de tailles $d * n * T$, où d est la dimension de l'espace. Nous verrons en 6.1.2 comment effectuer l'étape d'intégration nécessaire au calcul des trajectoires.

Supposons à présent que la fonction $A : (\mathbf{R}^d)^n \rightarrow \mathbf{R}$ est différentiable. Nous voulons alors définir un gradient de la fonctionnelle J .

Gradient dans L_V^2 et méthode de projection du gradient

L'idée ici est de déterminer le gradient de la fonctionnelle en tant que fonction de $v \in L_V^2$, puis d'en déduire une méthode de descente sur les variables α_t^i . Nous devons donc calculer la variation de la fonctionnelle J correspondant à une variation $v^\varepsilon = v + \varepsilon \tilde{v}$ du champ v , où $\tilde{v} \in L_V^2$. Dans ce qui suit, la notation ∂_ε désigne la différentiation par rapport à ε évaluée en $\varepsilon = 0$. La variation du premier terme de (6.1) s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \left(\gamma \int_0^1 \|v_t^\varepsilon\|_V^2 dt \right) &= 2\gamma \int_0^1 \langle v_t, \tilde{v}_t \rangle_V dt, \\ &= 2\gamma \int_0^1 \langle k_V(\mathbf{x}_t, \cdot) \boldsymbol{\alpha}_t, \tilde{v}_t \rangle_V dt, \\ &= 2\gamma \int_0^1 \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \tilde{v}(\mathbf{x}_t) dt. \end{aligned}$$

Il nous reste donc à calculer la variation de $A(\mathbf{x}_1^\varepsilon) = A(\phi_1^{v^\varepsilon}(\mathbf{x}))$. D'après la formule de variation du flot (1.14), il vient

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon A(\mathbf{x}_1^\varepsilon) &= d_{\mathbf{x}_1} A \partial_\varepsilon(\phi_1^{v^\varepsilon}(\mathbf{x}_1)), \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_{x_1^i} A(\mathbf{x}_1) d_{x_t^i} \phi_{t1}^v \tilde{v}_t(x_t^i) dt, \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (d_{x_t^i} \phi_{t1}^v)^* \nabla_{x_1^i} A(\mathbf{x}_1) \cdot \tilde{v}_t(x_t^i) dt. \end{aligned}$$

Notons $\beta_t^i = (d_{x_t^i} \phi_{t1}^v)^* \nabla_{x_1^i} A(\mathbf{x}_1)$ et $\boldsymbol{\beta}_t = (\beta_t^1, \dots, \beta_t^n)$. Nous avons donc

$$\partial_\varepsilon A(\mathbf{x}_1^\varepsilon) = \int_0^1 \boldsymbol{\beta}_t \cdot \tilde{v}_t(\mathbf{x}_t) dt.$$

Finalement la variation de J est :

$$\partial_\varepsilon J(v^\varepsilon) = \int_0^1 (\gamma \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\beta}_t) \cdot \tilde{v}_t(\mathbf{x}_t) dt. \quad (6.4)$$

A partir des équations vérifiées par la différentielle du flot (1.10), nous pouvons écrire les équations intégrales rétrogrades vérifiées par les vecteurs β_t^i :

$$\begin{aligned} \beta_t^i &= \nabla_{x_1^i} A(\mathbf{x}_1) - \int_t^1 (d_{x_s^i} v_s)^* \beta_s^i ds \\ &= \nabla_{x_1^i} A(\mathbf{x}_1) - \int_t^1 \sum_{j=1}^n \nabla_{x_s^i} [\alpha_s^j \cdot k_V(x_s^i, x_s^j) \beta_s^j] ds, \end{aligned}$$

soit encore, en notations compactes :

$$\boldsymbol{\beta}_t = \nabla_{\mathbf{x}_1} A - \int_t^1 \sum_{j=1}^n \nabla_1 [\boldsymbol{\alpha}_s \cdot k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \boldsymbol{\beta}_s] ds, \quad (6.5)$$

où la notation ∇_1 signifie que le gradient est pris seulement vis-à-vis de la première variable du noyau. Lorsque le noyau k_V est scalaire radial : $k_V(x, y) = h_V \left(\frac{|y-x|^2}{\sigma_V^2} \right) \text{id}$, on obtient plus explicitement

$$\beta_t^i = \nabla_{x_1^i} A - \frac{2}{\sigma_V^2} \int_t^1 \sum_{j=1}^n h_V' \left(\frac{|x_s^i - x_s^j|^2}{\sigma_V^2} \right) (\alpha_s^j \cdot \beta_s^i) (x_s^i - x_s^j) ds.$$

Le gradient de la fonctionnelle J dans l'espace L_V^2 s'obtient directement à partir de la formule (6.4) :

$$(\nabla J)_t(x) = k_V(\mathbf{x}_t, x)(2\gamma \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\beta}_t). \quad (6.6)$$

Choisissons un pas de descente $\lambda > 0$. Si $\nabla J \neq 0$ et si λ est suffisamment petit, alors en posant $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t = \boldsymbol{\alpha}_t - \lambda(2\gamma \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\beta}_t)$ puis

$$\bar{v}_t(x) = v_t(x) - \lambda(\nabla J)_t(x) = k_V(\mathbf{x}_t, x) \bar{\boldsymbol{\alpha}}_t,$$

on obtient $J(\bar{v}) < J(v)$. Cependant le champ \bar{v} n'appartient plus à $L_{V,S}^2$ puisque les trajectoires \mathbf{x}_t et les vecteurs $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t$ ne sont plus liés par l'équation (6.3). Il nous faut donc reprojeter le champ \bar{v} sur $L_{V,S}^2$. Ceci se fait en deux étapes :

1. Calcul des trajectoires $\hat{\mathbf{x}}_t = \phi_t^{\bar{v}}(\mathbf{x}^i)$ par résolution du système intégral

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x} + \int_0^t k_V(\mathbf{x}_s, \hat{\mathbf{x}}_s) \bar{\boldsymbol{\alpha}}_s ds, \quad (6.7)$$

2. Calcul, pour chaque $t \in [0, 1]$, des vecteurs $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t$ correspondant à la projection \hat{v} de \bar{v} sur l'espace $L_{V,S}^2$ (théorème 12). Ceci se fait par inversion des systèmes linéaires

$$\partial_t \hat{\mathbf{x}}_t = k_V(\hat{\mathbf{x}}_t, \hat{\mathbf{x}}_t) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t. \quad (6.8)$$

Le champ projeté est alors $\hat{v}_t(x) = k_V(\hat{\mathbf{x}}_t, x) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t$. Par construction il vérifie $\|\hat{v}\|_{L_V^2} \leq \|\bar{v}\|_{L_V^2}$ et $\phi_1^{\hat{v}}(\mathbf{x}) = \phi_1^{\bar{v}}(\mathbf{x})$. Par conséquent $A(\phi_1^{\hat{v}}(\mathbf{x})) = A(\phi_1^{\bar{v}}(\mathbf{x}))$, et finalement

$$J(\hat{v}) \leq J(\bar{v}) < J(v).$$

Pour résumer cette discussion, voici le schéma d'un algorithme de descente écrit selon cette méthode :

Procédure Descente()Initialisation de α ; choix d'un pas de descente λ **Répéter**Calcul des trajectoires x_t^i par intégration de (6.3)Calcul des vecteurs β_t^i par intégration de (6.5)

$$\bar{\alpha} = (1 - 2\lambda\sigma_A^2)\alpha - \lambda\beta$$

Calcul des trajectoires \hat{x}_t^i par intégration de (6.7)Calcul des vecteurs $\hat{\alpha}_t^i$ par résolution des systèmes linéaires (6.8)

$$\alpha = \hat{\alpha} ;$$

jusqu'à ce que (*condition d'arrêt*)**Fin**

L'étape de projection du gradient nécessite l'inversion des systèmes linéaires (6.8) pour le calcul des $\hat{\alpha}_t^i$. Ceci rajoute une complexité d'ordre $O(n^3)$ à l'algorithme. En pratique, si on utilise une méthode de gradient conjugué pour en initialisant les variables par les $\bar{\alpha}_t^i$, la convergence se fait rapidement. Surtout, en se contentant de quelques itérations de gradient conjugué, on obtient une direction de descente proche du gradient, ce qui est suffisant.

Approche directe : gradient "en α ", donnant un algorithme en $O(n^2)$

L'espace $L_{V,S}^2$ est paramétré par l'application $t \mapsto \alpha_t$ dans $L^2([0, 1], (\mathbf{R}^d)^n)$ (cf. 25). Nous pouvons donc calculer la variation de la fonctionnelle J en tant que fonction de ces paramètres, en dérivant la formule (2.25)

$$J(\alpha) = \gamma \int_0^1 \alpha_t \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \alpha_t dt + A(\mathbf{x}_1). \quad (6.9)$$

Soit une variation $\alpha^\varepsilon = \alpha + \varepsilon \tilde{\alpha}$ des paramètres. La variation $\tilde{v} = \partial_\varepsilon v^\varepsilon$ des champs de vecteurs correspondant se calcule à partir de l'équation (6.2) :

$$\tilde{v}_t(x) = \partial_1[k_V(\mathbf{x}_t, x)\alpha_t] \tilde{\mathbf{x}}_t + k_V(\mathbf{x}_t, x) \tilde{\alpha}_t,$$

où $\tilde{\mathbf{x}}_t$ désigne les variations correspondantes des trajectoires : $\tilde{\mathbf{x}}_t = \partial_\varepsilon \phi_t^{v^\varepsilon}(\mathbf{x})$. Les équations vérifiées par $\tilde{\mathbf{x}}_t$ s'obtiennent à partir de (6.3) :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \int_0^t (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s)\alpha_s] \tilde{\mathbf{x}}_s + k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \tilde{\alpha}_s ds.$$

Cette dernière équation est une équation linéaire en la variable $\tilde{\mathbf{x}}_t$; nous pouvons donc écrire la solution, par la méthode de variations des constantes, en fonction de la résolvante

du système linéaire sans second membre :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \int_0^t R_{st} k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_s ds,$$

où l'opérateur R_{st} est solution de

$$R_{st} = \text{id} + \int_s^t (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r) \boldsymbol{\alpha}_r] R_{sr} dr,$$

ou encore de l'équation rétrograde :

$$R_{st} = \text{id} + \int_s^t R_{rt} (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r) \boldsymbol{\alpha}_r] dr. \quad (6.10)$$

A présent nous pouvons dériver la formule (6.9) :

$$\partial_\varepsilon J(v^\varepsilon) = 2\gamma \int_0^1 \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t dt + \gamma \int_0^1 \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \partial_\varepsilon(k_V(\mathbf{x}_t^\varepsilon, \mathbf{x}_t^\varepsilon) \boldsymbol{\alpha}_t) dt + d_{\mathbf{x}_1} A \partial_\varepsilon(\mathbf{x}_1^\varepsilon),$$

Le deuxième terme peut être réécrit :

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^1 \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \partial_\varepsilon(k_V(\mathbf{x}_t^\varepsilon, \mathbf{x}_t^\varepsilon) \boldsymbol{\alpha}_t) dt &= \gamma \int_0^1 \int_0^t \boldsymbol{\alpha}_t \cdot (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\alpha}_t] R_{st} k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_s ds dt \\ &= \gamma \int_0^1 \left(\int_t^1 R_{ts}^* (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \boldsymbol{\alpha}_s]^* \boldsymbol{\alpha}_s ds \right) \cdot k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t dt. \end{aligned}$$

Et pour le troisième terme, nous avons

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}_1} A \partial_\varepsilon(\mathbf{x}_1^\varepsilon) &= \int_0^1 d_{\mathbf{x}_1} A R_{t1} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t dt, \\ &= \int_0^1 d_{\mathbf{x}_1} A R_{t1} k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t dt \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\partial_\varepsilon J(v^\varepsilon) = \int_0^1 k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \left(2\gamma \boldsymbol{\alpha}_t + \gamma \int_t^1 R_{ts}^* (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \boldsymbol{\alpha}_s]^* \boldsymbol{\alpha}_s ds + R_{t1}^* \nabla_{\mathbf{x}_1} A \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t dt.$$

Le gradient $(\nabla J) \in L^2([0, 1], (\mathbf{R}^d)^n)$ s'écrit donc :

$$(\nabla J)_t = k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) (2\gamma \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t),$$

où le vecteur $\boldsymbol{\eta}_t = \gamma \int_t^1 R_{ts}^* (\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \boldsymbol{\alpha}_s]^* \boldsymbol{\alpha}_s ds + R_{t1}^* \nabla_{\mathbf{x}_1} A$ s'obtient par résolution de l'équation intégrale rétrograde

$$\boldsymbol{\eta}_t = \nabla_{\mathbf{x}_1} A + \int_t^1 ((\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) \boldsymbol{\alpha}_s]^* (\boldsymbol{\eta}_s + \gamma \boldsymbol{\alpha}_s) ds. \quad (6.11)$$

Lorsque le noyau k_V est radial : $k_V(x, y) = h_V \left(\frac{|y-x|^2}{\sigma_V^2} \right) \text{id}$, ceci s'écrit

$$\eta_t^i = \nabla_{x_t^i} A + \frac{2}{\sigma_V^2} \int_t^1 \sum_{j=1}^n h'_V \left(\frac{|x_s^j - x_s^i|^2}{\sigma_V^2} \right) (\alpha_s^i \cdot \eta_s^j + \alpha_s^j \cdot \eta_s^i + 2\gamma \alpha_s^i \cdot \alpha_s^j) (x_s^i - x_s^j) ds.$$

Le choix de la métrique L^2 sur les paramètres α_t est arbitraire. Un choix plus judicieux ici est d'utiliser la métrique donnée par l'opérateur $k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)$, qui a le double avantage d'être plus proche de la métrique induite par la norme L_V^2 sur le sous-espace $L_{V,S}^2$, et de simplifier la formule du gradient, puisque dans ce cas nous obtenons simplement

$$(\nabla J)_t = 2\gamma \alpha_t + \eta_t.$$

Le schéma de calcul du gradient est ici :

Fonction Gradient(α) : ∇J
 | Calcul des trajectoires x_t^i par intégration de (6.3)
 | Calcul des vecteurs η_t^i par intégration de (6.11)
 | $\nabla J = 2\gamma \alpha + \eta$
Fin

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne comporte plus d'étape d'inversion de systèmes linéaires. Par conséquent la complexité théorique est ici d'ordre $O(n^2)$.

6.1.2 Méthodes d'intégration

Les algorithmes schématisés ci-dessus comportent des étapes d'intégration. Celles-ci peuvent être effectuées par un schéma centré d'Euler du type prédicteur/correcteur. Pour l'intégration du système 6.3 par exemple, l'algorithme correspondant s'écrira alors :

Procédure CompTraj(α)
 | Création de $\dot{\mathbf{x}}$, tableau de taille $d * n * T$
 | **Pour** t de 1 à $T - 1$ **faire**
 | | $\dot{\mathbf{x}}_t = k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) \alpha_t$
 | | $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \frac{\delta_T}{2} (\dot{\mathbf{x}}_t + k_V(\mathbf{x}_t + \delta_T \dot{\mathbf{x}}_t, \mathbf{x}_t + \delta_T \dot{\mathbf{x}}_t) \alpha_{t+1})$
 | **Fin Pour**
Fin

Rappelons que nous utilisons des notations matricielles pour désigner les opérations de sommation sur les noyaux. Par exemple l'opération $\dot{\mathbf{x}}_t = k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)\boldsymbol{\alpha}_t$ ci-dessus consiste, pour tout $1 \leq i \leq n$, à effectuer la somme de multiplications matricielles $\dot{x}_t^i = \sum_{j=1}^n k_V(x_t^j, x_t^i)\alpha_t^i$. L'utilisation effective de la grande matrice $k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)$, de taille $(d * n)^2$ n'est pas recommandé car cela peut poser des problèmes de place mémoire lorsque le nombre de points n est grand. Nous reviendrons en 6.3 sur le calcul de ces sommations.

Pour affiner le calcul, il est possible d'utiliser des schémas à pas multiples une fois les premières valeurs initialisées. Par contre des méthodes de type Runge-Kutta ne sont pas directement applicables car elles nécessiteraient l'interpolation des vecteurs α_t^i pour des valeurs non entières de l'indice t .

6.1.3 Méthodes d'optimisation

Une fois écrits les codes de calcul de la fonctionnelle J et de son gradient, nous pouvons "brancher" tout algorithme d'optimisation approprié. Du fait de la grande dimension éventuelle de la variable de minimisation $\boldsymbol{\alpha}$ ($d * n * T$), les méthodes de type Newton ou quasi-Newton semblent trop lourdes ici car elles nécessitent le calcul, exact ou approché, du Hessien de la fonctionnelle, matrice de taille $(d * n * T)^2$. Nous nous contenterons donc de méthodes de type gradient simple ou gradient conjugué, avec choix adaptatif du pas de descente. Ce choix du pas peut être fait suivant la règle de Wolfe [42].

6.1.4 Synthèse du difféomorphisme

Une fois l'optimisation effectuée, le difféomorphisme ϕ^v est paramétré par les vecteurs α_t^i . En fait pour éviter des calculs supplémentaires, on récupère aussi les trajectoires x_t^i . Le calcul de l'image de m points y^1, \dots, y^m quelconques de \mathbf{R}^d se fait alors par intégration des équations

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y} + \int_0^s k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s)\boldsymbol{\alpha}_s ds, \quad (6.12)$$

où $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m)$ et $\mathbf{y}_t = \phi_t^v(\mathbf{y})$.

Fonction Flot($\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$) : \mathbf{y}_1
 | Intégration du flot par (6.12)
Fin

6.2 Application

6.2.1 Appariement de points

Nous reprenons la fonctionnelle d'appariement vue en 2.2.4 :

$$A((z^i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^n |z^i - y^i|^2. \quad (6.13)$$

On a donc ici simplement $\nabla_{z^i} A = 2(z^i - y^i)$.

6.2.2 Appariement de mesures

Pour l'appariement de deux sommes de masses de Dirac $\sum_{i=1}^n a^i \delta_{x^i}$ et $\sum_{j=1}^m b^j \delta_{y^j}$, le terme d'appariement s'écrit

$$\begin{aligned} A((z^i)_{1 \leq i \leq n}) &= \left\| \sum_{i=1}^n a^i \delta_{z^i} - \sum_{j=1}^m b^j \delta_{y^j} \right\|_{I'}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a^i a^j k_I(z^i, z^j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a^i b^j k_I(z^i, y^j) + \sum_{i,j=1}^m b^i b^j k_I(y^i, y^j). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \nabla_{z^i} A &= \sum_{j=1}^n a^i a^j (\nabla_1 k_I(z^i, z^j) + \nabla_2 k_I(z^j, z^i)) - 2 \sum_{j=1}^m a^i b^j \nabla_1 k_I(z^i, y^j) \\ &= 2a^i \left(\sum_{j=1}^n a^j \nabla_1 k_I(z^i, z^j) - \sum_{j=1}^m b^j \nabla_1 k_I(z^i, y^j) \right). \end{aligned}$$

Pour un noyau radial scalaire $k_I(x, y) = \mathbf{h}_I \left(\frac{|y-x|^2}{\sigma_I^2} \right)$,

$$\nabla_{z^i} A = \frac{4}{\sigma_I^2} a^i \left(\sum_{j=1}^n a^j \mathbf{h}'_I \left(\frac{|z^j - z^i|^2}{\sigma_I^2} \right) (z^i - z^j) - \sum_{j=1}^m b^j \mathbf{h}'_I \left(\frac{|y^j - z^i|^2}{\sigma_I^2} \right) (z^i - y^j) \right).$$

6.2.3 Appariement de courants

Pour l'appariement de courants, la fonctionnelle sous la deuxième formulation (cf. (5.11)) s'écrit

$$A((z^i)) = \|\mathbf{C}(R) - \mathbf{C}(T)\|_{W'}^2,$$

où R désigne la triangulation dont les sommets sont les z^i . L'expression explicite est alors :

$$\begin{aligned} A((z^i)) = &= \sum_{f,g} N(f)^t k_W(c(g), c(f)) N(g) \\ &- 2 \sum_{f,q} N(f)^t k_W(c(q), c(f_1)) N(q) \\ &+ \sum_{q,r} N(q)^t k_W(c(q), c(r)) N(r), \end{aligned}$$

où les f, g (resp. q, r) indexent les faces de la triangulation R (resp. T). Nous devons calculer les dérivées partielles de ce terme d'attache. Notons $\partial_{f^i} A$ la contribution de la face f à l'un de ses sommets f^i . Nous avons $\partial_{f^i} A \eta = 2[\partial_{f^i} \mathbf{C}(R) \eta](\omega)$, avec $\omega = K_W(\mathbf{C}(R) - \mathbf{C}(T))$ et $\mathbf{C}(R)(\omega) = \sum_f \delta_{c(f)}^{N(f)}(\omega) = \sum_f N(f) \cdot \bar{\omega}(c(f))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_{f^i} A \eta &= 2\partial_{f^i} N(f) \eta \cdot \bar{\omega}(c(f)) + N(f) \cdot d\bar{\omega}(c(f)) \partial_{f^i} c(f) \eta, \\ &= (\eta \times e^i) \cdot \bar{\omega}(c(f)) + \frac{2}{3} N(f) \cdot d\bar{\omega}(c(f)) \eta, \end{aligned}$$

et donc $\nabla_{f^i} A = (e^i \times \bar{\omega}(c(f))) + \frac{2}{3} d\bar{\omega}(c(f)) * N(f)$. A présent, $\omega(x) = K_W(\mathbf{C}(R) - \mathbf{C}(T))$, et donc

$$\bar{\omega}(x) = \sum_g k_W(c(g), x) N(g) - \sum_q k_W(c(q), x) N(q).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \nabla_{f^i} A &= \sum_g e^i \times k_W(c(g), c(f)) N(g) - \sum_q e^i \times k_W(c(q), c(f)) N(q) \\ &+ \frac{2}{3} \sum_g \partial_1 k_W(c(f), c(g)) N(f) - \frac{2}{3} \sum_q \partial_1 k_W(c(f), c(q)) N(f). \quad (6.14) \end{aligned}$$

Rappelons, pour la bonne compréhension de cette formule, que e^i désigne le côté du triangle f opposé au sommet f^i , que la sommation sur g est faite sur tous les triangles de R , et la sommation sur q sur tous les triangles de T . Finalement, $\partial_{z^i} A$ s'obtient en additionnant les contributions de chaque triangle de R ayant z^i pour sommet.

6.3 Évaluation rapide des noyaux - Méthodes "Fast Multipole"

Les méthodes "Fast multipole" étaient initialement destinées à la simulation des systèmes physiques impliquant un grand nombre de particules. Le premier article sur ce sujet

est celui de Greengard et Rokhlin [29]. L'idée est d'accélérer le calcul des interactions potentielles entre tous les couples de particules en remplaçant le calcul effectif par un développement en série tronqué pour des groupes de particules proches. Greengard et Strain ont ensuite appliqué cette méthode pour le calcul rapide des convolutions discrètes par un noyau gaussien, c'est-à-dire l'évaluation des fonctions de la forme

$$f(y) = \sum_{i=1}^n a^i \exp\left(-\frac{|y-x^i|^2}{\sigma^2}\right), \quad a^i \in \mathbf{R}, x^i \in \mathbf{R}^d, \quad (6.15)$$

en un certain nombre de points $y^j \in \mathbf{R}^d$, $j \in \{1, \dots, m\}$ en effectuant un développement en série de la fonction gaussienne à l'aide des polynômes de Hermite. C'est la méthode de Transformée de Gauss Rapide, ou FGT (*Fast Gauss Transform*) [30]. L'algorithme final est de complexité $O(n)$ au lieu de $O(n^2)$ par un calcul direct. Cependant cette complexité croît de façon exponentielle avec la dimension d de l'espace. D'autres algorithmes reposant sur le même principe mais basés sur des manipulations algébriques différentes ont alors été proposés, notamment la méthode "Improved Fast Gauss Transform" par Yang, Duraiswami et Gumerov [57], que nous présentons maintenant.

6.3.1 Algorithme IFGT

L'algorithme IFGT tire partie de la régularité de la gaussienne pour proposer un développement en série différent de celui donné par les polynômes de Hermite. En outre, le regroupement des points est effectué par la méthode "farthest point clustering", plus efficace que la partitionnement de l'espace par boîtes utilisé pour la FGT originale.

Partitionnement de l'espace

Le problème de répartition spatiale d'un ensemble S de n points de l'espace \mathbf{R}^d en K groupes (clusters) C_1, \dots, C_K a été largement étudié. La répartition optimale appelée K -center consiste à trouver simultanément une répartition et les centres $c_1, \dots, c_K \in \mathbf{R}^d$ qui minimisent le "rayon" de la répartition ;

$$r_x = \max_{1 \leq k \leq K} \max_{x_i \in C_k} |x^i - c_k|,$$

Ce problème est de complexité NP . Le "farthest point clustering" est une méthode très simple donnant une bonne solution approchée. L'algorithme consiste à choisir les centres c_1, \dots, c_K parmi les points x^i de la manière suivante : c_1 est choisi au hasard, puis pour $k \geq 2$, c_k est défini comme le point x^i situé le plus loin de l'ensemble $\{c_1, \dots, c_{k-1}\}$. Chacun des n points est assigné au cluster correspondant au centre c_k le plus proche. Pour cet algorithme, le rayon r_x de la répartition est une fonction décroissante du nombre de clusters, et tendant vers 0 (puisque $r_x = 0$ pour $K \geq n$). Aussi il n'est pas nécessaire

de fixer le nombre K de groupes à l'avance, puisqu'il il suffit d'itérer l'algorithme jusqu'à atteindre un rayon r_x demandé. La complexité de cette méthode est en $O(nK)$, le nombre total K de clusters étant indépendant de n (il ne dépend que du rayon r_x et du "volume" total d'espace occupé par les points).

Développement en série de f

Supposons que les points x^i soient répartis en K groupes C_1, \dots, C_K de centres c_1, \dots, c_K . On note r_x le rayon de cette répartition. On développe alors la somme (6.15) autour de chaque pôle c_k :

$$f(y) = \sum_{k=1}^K \sum_{\alpha \geq 0} T_k^\alpha \exp\left(-\frac{|y - c_k|^2}{\sigma^2}\right) \left(\frac{y - c_k}{\sigma}\right)^\alpha,$$

où α désigne un multi-indice d'entiers positifs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, avec la convention $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d}$ pour tout $z \in \mathbf{R}^d$. les coefficients T_k^α sont donnés par

$$T_k^\alpha = \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha!} \sum_{x^i \in C_k} a^i \exp\left(-\frac{|x^i - c_k|^2}{\sigma^2}\right) \left(\frac{x^i - c_k}{\sigma}\right)^\alpha,$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$.

On effectue alors le calcul approché de $f(y)$ en tronquant la série de Taylor à un ordre p (i.e. on somme pour $|\alpha| \leq p$). Si le nombre K de clusters est grand, on peut aussi n'effectuer les sommations que sur les centres c_k situés à une distance au plus r_y de y , où r_y est un seuil fixé. L'erreur d'approximation est inférieure à

$$\left(\frac{2^p}{p!} \rho_x^p \rho_y^p + e^{-\rho_y^2}\right) \sum |a^i|,$$

où $\rho_x = r_x/\sigma$ et $\rho_y = r_y/\sigma$. Cette erreur est indépendante du nombre de points n . Pour atteindre une certaine précision, on fixe les paramètres p, r_x et éventuellement r_y de façon à satisfaire l'inégalité ci-dessus. La complexité totale de l'algorithme IFGT est alors d'ordre $O(n)$, avec un facteur multiplicatif fonction des paramètres K, p, r_x et r_y .

6.3.2 Mise en oeuvre pour un algorithme d'appariement

Nous revenons maintenant aux algorithmes d'appariement vus à la section précédente. Lorsque le noyau k_V est scalaire gaussien, $k_V(x, y) = \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{\sigma_V^2}\right)$, il est possible de réécrire directement les étapes de sommation du type $k_V(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)\alpha_t$ par des appels à l'algorithme IFGT. Le calcul des vecteurs β_t^i via les équations (6.5), ou des η_t^i via (6.11), pose en revanche une légère difficulté. Dans le premier cas nous devons calculer

$$\nabla_{x_s^i} [\alpha_s^j \cdot k_V(x_s^i, x_s^j) \beta_s^i] = -\frac{2}{\sigma_V^2} \exp\left(-\frac{|x_s^i - x_s^j|^2}{\sigma_V^2}\right) (\alpha_s^j \cdot \beta_s^i) (x_s^i - x_s^j).$$

Si l'on veut utiliser l'algorithme IFGT ici, il faut découpler l'expression $(\alpha_s^j \cdot \beta_s^i)(x_s^i - x_s^j)$. Le seul moyen est d'écrire

$$(\alpha_s^j \cdot \beta_s^i)(x_s^i - x_s^j) = (\alpha_s^j \cdot \beta_s^i)x_s^i - (x_s^j \alpha_s^{jT})\beta_s^i,$$

ce qui signifie qu'il faut passer à la fonction IFGT les dn coefficients des vecteurs α_s^j mais aussi les d^2n coefficients des matrices $x_s^j \alpha_s^{jT}$. Ce surcoût de calcul (d'un facteur d) ne change pas la complexité globale de l'algorithme vis-à-vis du nombre de points. Pour les vecteurs η_t^i , l'élément d'intégration s'écrit

$$(((\partial_1 + \partial_2)[k_V(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s)\boldsymbol{\alpha}_s])^* \boldsymbol{\eta}_s)_i = - \sum_{j=1}^n e^{-\frac{|x_s^j - x_s^i|^2}{\sigma_V^2}} (\alpha_s^i \cdot \eta_s^j + \alpha_s^j \cdot \eta_s^i)(x_s^i - x_s^j).$$

Il faut donc découpler de la même manière les expressions $(\alpha_s^i \cdot \eta_s^j + \alpha_s^j \cdot \eta_s^i)(x_s^i - x_s^j)$.

Grâce à cette méthode rapide, on réduit donc la complexité totale des calculs de la fonctionnelle et du gradient d'un facteur n . Avec la méthode de projection du gradient décrit en 6.1.1, le coût devient donc d'ordre $O(n^2)$, voire $O(n)$ si l'on effectue seulement un petit nombre d'itérations pour l'inversion des systèmes linéaires. Pour la deuxième méthode (gradient "en $\boldsymbol{\alpha}$ ", cf. 6.1.1), la complexité est d'ordre $O(n)$.

6.3.3 Méthode rapide pour un noyau quelconque

La méthode "Fast multipole" peut être appliquée à n'importe quel type de noyau, dans la mesure où l'on en connaît une formule analytique pour pouvoir déterminer les développements en série. Notons cependant que l'algorithme IFGT utilise des propriétés algébriques spécifiques à la fonction gaussienne ; il n'est donc pas directement transposable.

6.4 Méthodes multi-échelles

Toutes les méthodes d'appariement vues ici posent le problème du choix des paramètres. En pratique, il y a deux paramètres déterminants communs à toutes les méthodes : le facteur λ réglant les poids respectifs des deux termes de la fonctionnelle, et l'échelle σ_V du noyau de déformation. En outre, les méthodes d'appariement de mesures et de courants introduisent une deuxième fonction noyau notée k_I (k_W pour les courants) dont il faut aussi fixer l'échelle. Dans cette partie nous essayons de donner des idées concernant ces deux paramètres d'échelle.

6.4.1 Réduction progressive de l'échelle pour l'appariement de mesures ou de courants

L'influence de l'échelle du noyau d'appariement de mesures (σ_I) ou de courants (σ_W) est en théorie très clair : plus cette échelle est petite, et plus l'appariement sera précis. Le

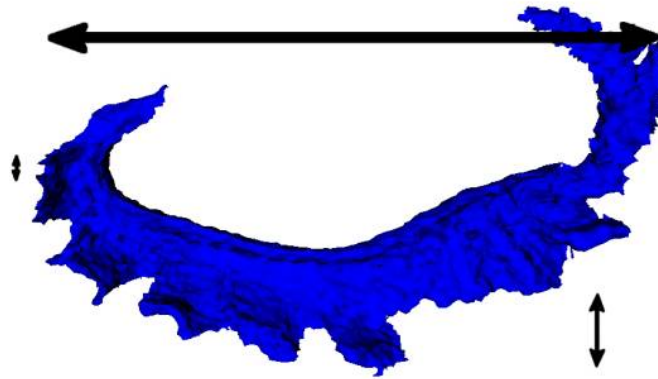


FIG. 6.2 – Segmentation 3D d’une surface corticale (gyrus cinguli)

choix de ce paramètre dépend donc de la taille des structures que l’on souhaite apparier. La figure 6.2 montre une surface segmentée de gyrus cinguli, où l’on peut distinguer trois échelles principales, symbolisées par les trois flèches. La plus grande correspond à la forme générale de l’objet, en forme de “C”. La deuxième est sans doute l’échelle optimale pour le recalage avec une autre surface du même type, car elle permet de décrire précisément la surface sans rentrer dans les détails des petites structures bosselées (troisième échelle) qu’il n’est pas pertinent d’apparier.

En pratique le choix d’une petite échelle augmente le nombre de minimums locaux de la fonctionnelle. On sera donc amené, pour rechercher le minimum global lié à une échelle optimale, à effectuer plusieurs étapes de minimisation en réduisant à chaque fois ce paramètre, jusqu’à atteindre l’échelle voulue. Nous nous limiterons ici à cette remarque intuitive, faute de pouvoir donner des raisonnements mathématiques précis. Expérimentalement, effectuer de la sorte quatre ou cinq minimisations successives - sans nécessairement attendre la convergence, sauf pour la dernière étape - donne des résultats probants.

6.4.2 Déformations multi-échelles

Le choix de l’échelle σ_V du noyau de déformation est un problème différent de ce qui vient d’être vu, et il n’est pas souhaitable d’appliquer le même raisonnement (réduction progressive de l’échelle au cours des minimisations). La figure 6.3 illustre l’influence de ce paramètre. Il s’agit d’un problème d’appariement de mesures où trois groupes de points sont déplacés tout en changeant de forme. Lorsque σ_V est trop grand, le difféomorphisme optimal effectue un recalage imprécis des objets, sauf à forcer l’appariement, ce qui conduit à un problème mal conditionné. A l’inverse si σ_V est trop petit, les champs de déformation deviennent nuls entre les points de contrôle; il n’y a plus d’interpolation. Il n’y a donc

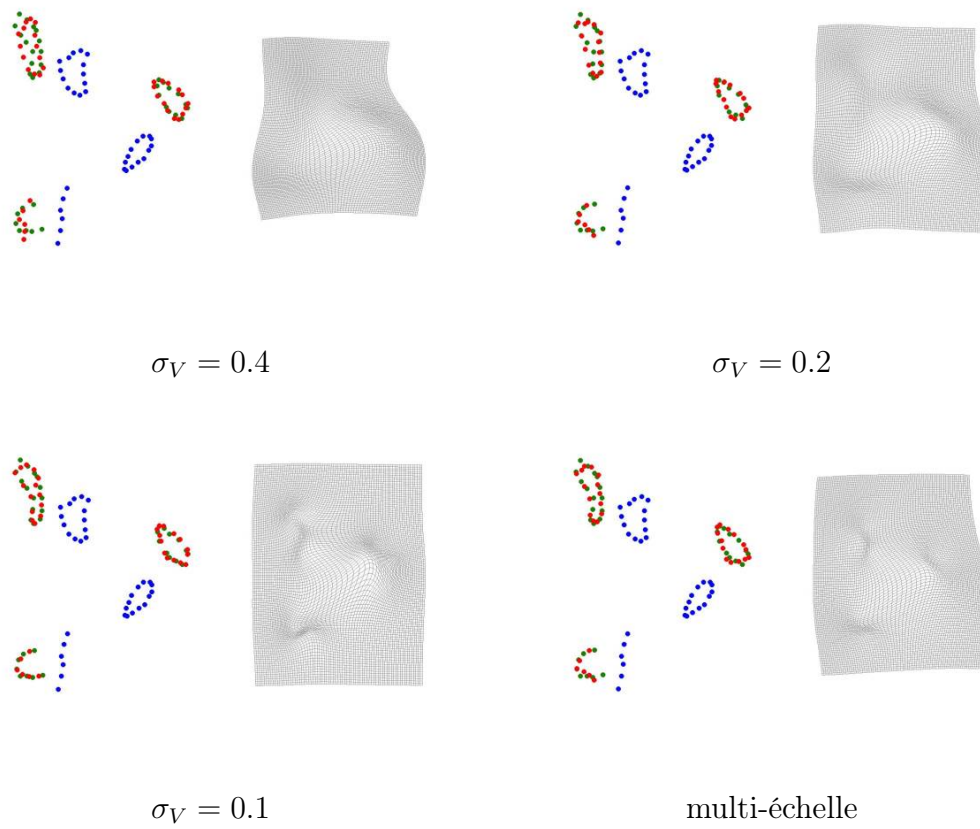


FIG. 6.3 – Appariement de mesures : influence de l'échelle σ_V sur le recalage

pas d'échelle idéale, mais plutôt un juste compromis à trouver entre bonne interpolation et précision. La solution multi-échelle que nous proposons maintenant consiste à faire varier l'échelle avec le paramètre $t \in [0, 1]$ d'intégration des champs de vecteurs.

Considérons un noyau k_V scalaire invariant par translations :

$$k_V(x, y) = \mathbf{h}_V(y - x)\text{id}.$$

Pour une échelle donnée $\sigma > 0$, on définit un nouveau noyau k_{V_σ} par la formule

$$k_{V_\sigma}(x, y) = \sigma^2 \mathbf{h}_V\left(\frac{y - x}{\sigma}\right)\text{id}.$$

On note alors V_σ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\sigma}$ l'espace de champs de vecteurs et le produit scalaire correspondants.

Proposition 35 *L'opération de changement d'échelle $v \mapsto D_\sigma^{-1}v \circ D_\sigma$, où D_σ désigne l'opérateur dilatation $x \mapsto \sigma x$ sur \mathbf{R}^d , définit une isométrie entre V_σ et V .*

Preuve. Notons $A_\sigma : v \mapsto D_\sigma^{-1}v \circ D_\sigma$. On vérifie d'abord que cette opération est isométrique pour les champs de la forme $k_{v_\sigma}(x, \cdot)\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle A_\sigma [k_{v_\sigma}(x, \cdot)\alpha], A_\sigma [k_{v_\sigma}(y, \cdot)\beta] \rangle_{V_\sigma} &= \sigma^4 \left\langle A_\sigma \left[\mathbf{h}_V\left(\frac{x - \cdot}{\sigma}\right)\alpha \right], A_\sigma \left[\mathbf{h}_V\left(\frac{y - \cdot}{\sigma}\right)\beta \right] \right\rangle_{V_\sigma} \\ &= \sigma^2 \left\langle \mathbf{h}_V\left(\frac{x}{\sigma} - \cdot\right)\alpha, \mathbf{h}_V\left(\frac{y}{\sigma} - \cdot\right)\beta \right\rangle_V \\ &= \sigma^2 \mathbf{h}_V\left(\frac{x - y}{\sigma}\right)\alpha \cdot \beta \\ &= \alpha \cdot k_{V_\sigma}(x, y)\beta = \langle k_{V_\sigma}(x, \cdot)\alpha, k_{V_\sigma}(y, \cdot)\beta \rangle_{V_\sigma}. \end{aligned}$$

Puisque les $k_{v_\sigma}(x, \cdot)\alpha$ forment un système complet dans V_σ , on en déduit que A_σ est une isométrie entre V_σ et son image dans V . De plus A_σ est surjectif puisque les $k_V(x, \cdot)\alpha$ forment un système complet dans V et sont les images des $\frac{1}{\sigma}k_{V_\sigma}(c, \cdot)\alpha \in V_\sigma$ par A_σ . \square

On suppose à présent la propriété additionnelle suivante : si $\sigma' > \sigma$ alors $V_{\sigma'}$ s'injecte dans V_σ . Une condition suffisante pour cela est, sous les hypothèses de la proposition 20 - \mathbf{h}_V et $\hat{\mathbf{h}}_V$ sont intégrables et continues, et $\hat{\mathbf{h}}_V(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \mathbf{R}^d$ - que l'application $\omega \mapsto \hat{\mathbf{h}}_V(\omega)$ soit décroissante sur \mathbf{R}^+ .

Soit à présent une application $t \mapsto \sigma_t$ de classe C^1 , décroissante et telle que $\sigma_1 = 1$. Pour un terme d'attache aux données A quelconque, on remplace le problème d'appariement (1.25) par le problème multi-échelle consistant à minimiser dans $L^2([0, 1], V)$ la fonctionnelle suivante :

$$J_{me}(v) = \int_0^1 \|v_t\|_{V_\sigma}^2 dt + A(\phi_1^v). \quad (6.16)$$

Nous allons montrer que ce problème coïncide avec le problème “mono-échelle” avec une dilatation additionnelle imposée. On considère la fonctionnelle suivante sur $L^2([0, 1], V)$:

$$J_d(u) = \int_0^1 \|u_t\|_V^2 dt + A(\phi_1^w \circ D_0^{-1}), \quad \text{où } w(x) = u(x) + \frac{\dot{\sigma}_t}{\sigma_t} x. \quad (6.17)$$

Proposition 36 *Pour tout $u \in L^2([0, 1], V)$, on a $J_d(u) = J_{me}(v)$ où $v_t = D_t^{-1} u_t \circ D_t$.*

Preuve. On a $\int_0^1 \|u_t\|_V^2 dt = \int_0^1 \|v_t\|_{V_\sigma}^2 dt$ grâce à la relation de changement d'échelle vue plus haut. Ensuite posons $\psi_t = D_t^{-1} \phi_t^w \circ D_0^{-1}$, et montrons que $\psi_t = \phi_t^v$:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_t &= D_t^{-1} \partial_t \phi_t^w \circ D_0^{-1} - \frac{\sigma_1 \dot{\sigma}_t}{\sigma_t^2} \phi_t^w \circ D_0^{-1}, \\ &= D_t^{-1} w_t \circ \phi_t^w \circ D_0^{-1} - \frac{\sigma_1 \dot{\sigma}_t}{\sigma_t^2} \phi_t^w \circ D_0^{-1}, \\ &= D_t^{-1} u_t \circ \phi_t^w \circ D_0^{-1} \\ &= D_t^{-1} u_t \circ D_t \psi_t = v_t \circ \psi_t. \end{aligned}$$

De plus $\psi_0 = id$, donc on a bien $\psi_t = \phi_t^v$, en particulier $\phi_1^w \circ D_0^{-1} = \phi_1^v$ et ainsi les termes d'appariement sont égaux. \square

Chapitre 7

Modeling planar shape variation via hamiltonian flows of curves

7.1 Introduction

This paper focuses on the study of plane curve deformation, and how it can lead to curve evolution, comparison and matching. Our primary interest is in diffeomorphic deformations, in which a template curve is in one-to-one smooth correspondence with a target curve. This correspondence will be expressed as the restriction (to the template curve) of a 2D diffeomorphism, which will control the quality of the matching.

This point of view, which is non standard in the large existing litterature on curve matching, emanates from the general theory of “large deformation diffeomorphisms”, introduced in [32, 22, 50], and further developed in [37, 38]. This is a different approach than the one which only considers the restriction of the diffeomorphisms to the curves, which is more standard, starting with the introduction of dynamic time warping algorithms in speech recognition [44], and developed in papers like [25, 17, 58, 51, 59, 53].

Like in [58, 36], however, our approach leads to geodesic distances between plane curves. In particular, we will provide a Hamiltonian interpretation of the geodesic equations (which in this case shares interesting properties with a physical phenomenon called solitons [33]), and exhibit the structure of the *momentum*, which is of main importance in this setting.

The deformation will be driven by a data attachment term which measures the quality of the matching. In this paper, we review 3 kinds of attachments. The first one, that we call measure-based, is based on the similarity of the singular measures in \mathbb{R}^2 which are supported by the curves. The second, which is adapted to *Jordan curves* corresponds to the measure of the symmetric differences of the domains within the curves (binary shapes). The last one is for data atachment terms based on a potential, as often introduced in the theory of active contours.

The paper is organized as follows. Section 7.2 provides some definition and notation,

together with a heuristic motivation of the approach. Section 7.3 develops a first version of the momentum theorem, which relates the momentum of the hamiltonian evolution to the differential of the data attachment term. Section 7.4 is an application of this framework to measure-based matching. Section 7.5 deals with binary shapes, and provides a more general version of the momentum theorem, which will also be used in section 7.6 for data attachment terms based on a potential. Finally, section 7.7 proves an existence theorem for the Hamiltonian flow.

7.2 Diffeomorphic curve and shape matching with large variability

In this paper, a shape $S_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ is defined as the interior of a sufficiently smooth Jordan curve (i.e. continuous, nonintersecting) $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ where \mathbb{T} is the 1D torus. (Hence, γ is a parametrization of the boundary of S .)¹

The emphasis will be on the action of global non-rigid deformation, for which we introduce some notation. A group G of C^1 diffeomorphisms provides a family of admissible non-rigid deformations. The action of a given deformation ϕ on a shape $S \subset \mathbb{R}^2$ is defined by

$$S_{def} = \phi(S). \quad (7.1)$$

Selecting one shape as an initial template $S_{temp} = S_{\gamma_{temp}}$, we will look for the best global deformation of the ambient space which transforms S_{temp} into a target shape S_{targ} . The optimal matching of the template on the target will be defined as an energy minimization problem

$$\phi_* = \operatorname{argmin}_{\phi \in G} R(\phi) + g(\phi(S_{temp}), S_{targ}) \quad (7.2)$$

where R is a regularization term penalizing unlikely deformations and g is the data term penalizing bad approximations of the target S_{targ} . In the framework of large deformations, the group G of admissible deformations is equipped with a right invariant metric distance d_G and the regularization term $R(\phi)$ is designed as an increasing function of $d_G(\operatorname{Id}, \phi)$ where Id is the identity ($x \rightarrow x$) mapping. One of the strengths of this diffeomorphic approach, which introduces a global deformation of the ambient space, is that it allows to model large deformations between shapes while preserving their natural non overlapping constraint. This is very hard to ensure with boundary-based methods, which match the boundaries of the region based on their geometric properties without involving their situation in the ambient space. Then, singularities may occur when, for example, two points which are far from each others for the arc length distance on the boundary are close for the euclidian distance in the ambient space (cf. fig 7.2).

¹ Obviously, the mapping $\gamma \rightarrow S_\gamma$ is not one to one since $S_\gamma = S_{\gamma'}$ as soon as $\gamma' = \gamma \circ \zeta$ and ζ is a parameter change.

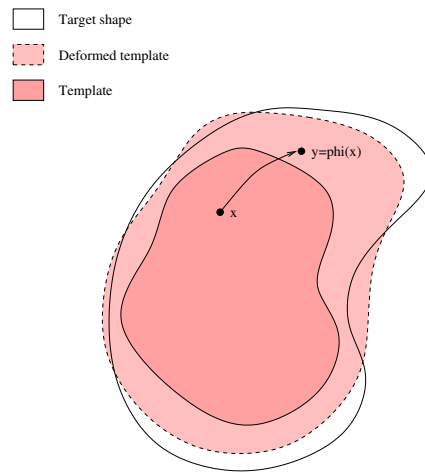


FIG. 7.1 – Comparing deformed shapes

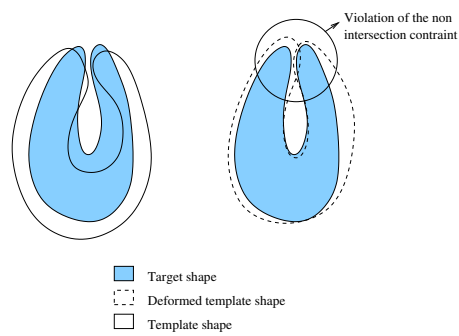


FIG. 7.2 – Violation of the non overlapping constraint for usual curve based approaches

Another issue in the context of large deformations is that smoothness constraints acting only on the displacement fields (point displacements from the initial configuration to the deformed one) cannot guarantee the invertibility of the induced mapping, creating, for instance, loops along the boundary. Even if there may be ad hoc solutions to fix this (like penalties on the Jacobian, [20]), we argue that considering the deformation itself ϕ as the variable instead of linearizing with respect to the displacement field $u = \text{Id} - \phi$ leads to a more natural geometrical framework. There is a high overhead in such an approach, since such ϕ s live in an infinite dimensional manifold whereas the displacement fields live in a more amenable vector space. However, this turns out to be manageable, if one chooses a computational definition of diffeomorphisms in G as the solutions at time 1 of flow equations

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = u_t \circ \phi_t, \quad \phi_0 = \text{id} \quad (7.3)$$

where at each time t , u_t belongs to a vector space of vector fields on the ambient space. To be slightly more precise, assume that the ambient space is a bounded open domain with smooth boundary $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and that V is a Hilbert space of vector fields continuously embedded in $C_0^p(\Omega, \mathbb{R}^2)$ with $p \geq 1$. Then, the solution of such flows exists for $t \in [0, 1]$ for any time-dependent vector field $u \in L^2([0, 1], V)$ ([22]) and we can define for any $t \in [0, 1]$, the flow mapping

$$u \rightarrow \phi_t^u, \quad u \in L^2([0, 1], V). \quad (7.4)$$

We finally define G as

$$G = \{ \phi_1^u \mid u \in L^2([0, 1], V) \}, \quad (7.5)$$

which is a subgroup of the C^1 diffeomorphisms on Ω . In the following, we will use the notation $H_1 = L^2([0, 1], V)$. This is the basic Hilbert space on which the optimization is performed : any problem involving a diffeomorphism as its variable can be formulated as a problem over H_1 through the onto map $u \mapsto \phi_1^u$. In our setting, the regularization term $R(\phi)$ is taken as a squared geodesic distance between ϕ and id on G , this distance being defined by

$$d_G(\phi, \phi')^2 = \inf \left\{ \int_0^1 |u_t|_V^2 dt \mid u \in H_1, \phi_1^u \circ \phi = \phi' \right\}. \quad (7.6)$$

The variational problem (7.2) becomes

$$u_* = \operatorname{argmin}_{u \in H_1} \left(\int_0^1 |u_t|_V^2 dt + g(\phi_1^u(S_{temp}), S_{targ}) \right) \quad (7.7)$$

Note that the reformulation of the problem from an infinite dimensional manifold to a Hilbert space comes at the cost of adding a new (time) dimension. One can certainly be concerned by the fact that the initial problem which was essentially matching 1D shape outlines, has become a problem formulated in term of time-dependent vector fields on Ω .

However, this expansion from 1D to 3D is only apparent. An optimal solution $u_* \in H_1$ minimizes the kinetic energy $\int_0^1 |u_t|_V^2 dt$ over the set of $\{u \in H_1 : \phi_1^{u_*} = \phi_1^u\}$ (for such u , the data term stays unchanged). This means that $t \rightarrow \phi_t^{u_*}$ is a geodesic path from id to $\phi_1^{u_*}$, so that $t \rightarrow u_{*,t}$ satisfies an evolution equation which allows the whole trajectory and the final $\phi_* = \phi_1^{u_*}$ to be reconstructed from initial data $u_{*,0} \in V$. Moreover, the main result in this paper shows that this initial data can in turn be put into a form $u_{*,0} = Kp_{*,0}$ where K is a known kernel operator and $p_{*,0}$ is a bounded normal vector field on the boundary of S_{temp} , reducing the problem to its initial dimension.

Let us summarize this discussion : *comparing shapes via a region based approach and global action of non rigid deformations of the ambient space is natural for modelling deformations of non-rigid objects. The estimation of large deformations challenges the usual linearized approaches in terms of dense displacement fields. The large deformation approach via the ϕ variable, more natural but apparently more complex has in fact potentially the same coding complexity : a normal vector field $p_{*,0}$ on the ∂S_{temp} from which the optimal ϕ_* and thus the deformed template shape $\phi_*(S_a)$ can be reconstructed.*

7.3 Optimal matching and geodesic shooting for shapes

7.3.1 Hypotheses on the compared shapes

The compared shapes S_{temp} and S_{targ} are assumed to correspond to the following class of Jordan shapes. We let \mathbf{T} be the unit 1D torus $\mathbf{T} = [0, 1]_{\{0=1\}}$.

Définition 18 (Jordan Shapes) *Let $k \geq 1$ be a positive integer.*

1. *We say that γ is a non stopping piecewise C^k Jordan curve in Ω if $\gamma \in C(\mathbf{T}, \Omega)$, γ is non self-intersecting and there exists a subdivision $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ of \mathbf{T} such that the restriction $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ is in $C^k([s_i, s_{i+1}], \mathbb{R}^2)$ on each interval and $\gamma'(s) \neq 0$ for any $s_i < s < s_{i+1}$. Such a subdivision will be called an admissible subdivision for γ . We denote $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$, the set of non stopping piecewise C^k Jordan curves in Ω .*
2. *Let $\mathcal{S}^k(\Omega)$ be the set of all subset S_γ where S_γ is the interior (the unique bounded connected component of $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbf{T})$) of $\gamma \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$.*

Introducing a parametrization γ of the boundary of a Jordan shape S ($S = S_\gamma$), and considering the action of ϕ on curves ² defined by

$$\gamma_{def} = \phi \circ \gamma \tag{7.8}$$

we get

$$\phi(S_\gamma) = S_{\phi \circ \gamma}, \tag{7.9}$$

²We check immediately that $\phi' \circ (\phi \circ \gamma) = (\phi' \circ \phi) \circ \gamma$ so that we have an action.

so that we can work as well with the curve representation of the boundary of a shape. A variational problem on Jordan shapes can be translated to a variational problem on Jordan curves thanks to the $\gamma \rightarrow S_\gamma$ mapping. Conversely, if $g_c(\gamma)$ is a driving matching term in a variational problem on Jordan curves, this term reduces to a driving matching term in a variational problem on Jordan shapes if

$$g_c(\gamma) = g_c(\gamma \circ \zeta) \quad (7.10)$$

for any C^∞ diffeomorphic change of variable $\zeta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Such a driving matching term g_c will be called a *geometric driving matching term*.

7.3.2 Momentum Theorem for differentiable driving matching term

We first study the case of a differentiable g_c , in the following sense :

Définition 19 1. Let $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ be a sequence in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$. We say that $\gamma_n \xrightarrow{\mathcal{C}_p^k(\Omega)} \gamma_\infty$ is there exists a common admissible subdivision $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ of \mathbf{T} for all the γ_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ such that for any $j \leq k$

$$\sup_{i, s \in [s_i, s_{i+1}]} \left| \frac{d^j}{ds^j} (\gamma_n - \gamma_\infty) \right| \rightarrow 0.$$

2. We say that $\Gamma : \mathbb{T} \times]-\eta, \eta[$ is a smooth perturbation of γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ if

(a) $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$, for any $s \in \mathbb{T}$,

(b) $\Gamma(\cdot, \epsilon) \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$, for any $|\epsilon| < \eta$,

(c) there exists an admissible subdivision $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ of γ such that for any $0 \leq i < n$, $\Gamma_{|[s_i, s_{i+1}] \times]-\eta, \eta[} \in C^{k,1}([s_i, s_{i+1}] \times]-\eta, \eta[, \mathbb{R}^2)$.

3. Let $g_c : \mathcal{C}_p^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$. We say that g_c is Γ -differentiable (in $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$) at γ if there exists $\partial_\gamma g_c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ such that for any smooth perturbation Γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ of γ , $q(\epsilon) \doteq g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$ has a derivative at $\epsilon = 0$ defined by $q'(0) = \int_{\mathbb{T}} \langle \partial_\gamma g_c(s), \partial_\epsilon \Gamma(s, 0) \rangle ds$.

Our goal in this section is to prove the following :

Theorem 1 Let $p \geq k \geq 0$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$ and let $g_c : \mathcal{C}_p^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ be lower semi-continuous on $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ ie $\liminf g_c(\gamma_n) \geq g_c(\gamma)$ for any sequence $\gamma_n \xrightarrow{\mathcal{C}_p^k(\Omega)} \gamma$.

1. Let $H_1 = L^2([0, 1], V)$. There exists $u_* \in H_1$ such that $J(u_*) = \min_{u \in H_1} J(u)$ where

$$J(u) = \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda g_c(\phi_1^u \circ \gamma_{\text{temp}}).$$

2. Assume that g_c is Γ -differentiable in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ at $\gamma_* = \phi_1^{u_*} \circ \gamma_{temp}$. Then, the solution u_* is in fact in $C^1([0, 1], V)$ and there exists $(\gamma_t, p_t) \in \mathcal{C}_p^k(\Omega) \times L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2)$ such that

(a) $\gamma_0 = \gamma_{temp}$, $p_1 = -\lambda \partial_{\gamma_*} g_c$ and for any $t \in [0, 1]$

$$u_{*,t}(m) = \int_{\mathbf{T}} K(m, \gamma_t(s)) p_t(s) ds, \quad \gamma_t = \phi_t^{u_*} \circ \gamma_{temp} \quad \text{and} \quad p_t = (d_{\gamma_t} \phi_t^{u_*})^*(p_1)$$

where $\phi_{s,t}^u = \phi_t^u \circ (\phi_s^u)^{-1}$ and K is the self reproducible kernel associated with V^3

(b) γ_t and p_t are solutions in $C^1([0, 1], L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2))$ of

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \partial_p H(\gamma, p) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\partial_\gamma H(\gamma, p) \end{cases} \quad (7.11)$$

$$\text{where } H(\gamma, p) = \frac{1}{2} \int p(y) K(\gamma(y), \gamma(x)) p(x) dx dy.$$

Moreover, if $k \geq 1$ and g_c is geometric, then for any $t \in [0, 1]$, the momentum p_t is normal to γ_t i.e $\langle p_t(s), \partial_s \gamma_t(s) \rangle = 0$ a.e.

Remark 1 Not surprisingly, H can be interpreted as the reduced hamiltonian associated with the following control problem on $L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})$, with control variable $u \in V$:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = f(\gamma, u) \\ \dot{\gamma}^0 = f^0(\gamma, u) \end{cases}$$

where $f(\gamma, u) = u(\gamma(\cdot))$ and $f^0(\gamma, u) = \frac{1}{2}|u|_V^2$.

7.3.3 Proof

We give in this section a proof of Theorem 1. Let us recall a regularity result we borrow from ([53]). If V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, then for any $u, h \in H_1$, $\Phi : \Omega \times [-\eta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by $\Phi(x, \epsilon) = \phi_1^{u+\epsilon h}(x)$ is a map in $C^{p,1}(\bar{\Omega} \times [-\eta, \eta], \mathbb{R}^2)$. From it, we deduce easily for $u = u_*$ and $h \in H_1$ that $\Gamma(s, \epsilon) \doteq \Phi(\gamma_{temp}(s), \epsilon)$ is a smooth perturbation of γ_{temp} in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$.

Let us denote $\gamma_0 = \gamma_{temp}$. The first step is the decomposition of J as $G \circ F$ where $F : H_1 \rightarrow M$ with $H_1 = L^2([0, 1], V)$, $M = \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p^k(\Omega)$,

$$F(u) = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt, \gamma_1^u \right) \quad \text{where } \gamma_t^u = \phi_t^u \circ \gamma_0 \quad (7.12)$$

³ We have use the notation $d_x \phi_{s,t}^u$ for the differential at x and $(d_x \phi_{s,t}^u)^*$ for the adjoint of $d_x \phi_{s,t}^u$. $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ is defined by $\langle K(\cdot, x)a, v \rangle_V = \langle a, v(x) \rangle_{\mathbb{R}^2}$ for $(a, v) \in \mathbb{R}^2 \times V$ and its existence and uniqueness are guaranteed by Riesz's theorem on continuous linear forms in a Hilbert space.

and $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ is given by

$$G(x, \gamma) = x + \lambda g_c(\gamma) \quad (7.13)$$

so that

$$J(u) = G \circ F(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda g_c(\gamma). \quad (7.14)$$

With this decomposition, we emphasize with F that we have an underlying curve evolution structure and G appears has a terminal cost in a optimal control point of view [55].

Point (1) of Theorem 1 follows from the strong continuity of the mapping $u \rightarrow \phi_1^u$ for the weak convergence in H_1 [53] : if $u_n \rightharpoonup u$ in H_1 , then $\phi_1^{u_n} \rightarrow \phi_1^u$ in $C^p(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ so that $\gamma_n \xrightarrow{C_p^k(\Omega)} \gamma$ where $\gamma_n = \phi_1^{u_n} \circ \gamma_0$ and $\gamma = \phi_1^u \circ \gamma_0$. Using the lower semicontinuity property of g_c for the convergence in $C_p^k(\Omega)$ and the lower semi-continuity of $\frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt$ for weak convergence in H_1 , we deduce that J is lower semi-continuous for the weak convergence in H_1 . Thus, the existence of u_* comes then from standard compactness argument of the strong balls in H_1 for the weak topology.

Point (2) of Theorem 1 : We deduce from ([53]) that for any $h \in H_1$, F admits a Gâteaux derivative in $H_2 = \mathbb{R} \times L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ in the direction h , denoted $\partial_u F(h)$, and given by

$$\partial_u F(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F(u + \epsilon h) - F(u)) = \left(\int_0^1 \langle u_t, h_t \rangle dt, v^h \circ \gamma_1^u \right) \quad (7.15)$$

where $\gamma_1^u = \phi_1^u \circ \gamma_0$ and

$$v^h = \int d_{\phi_{1,t}^u} \phi_{t,1}^u h_t \circ \phi_{1,t}^u dt. \quad (7.16)$$

Considering $u = u_*$, $\eta > 0$, $|\epsilon| < \eta$ and $\Gamma(s, \epsilon) = \gamma_1^{u_* + \epsilon h}(s)$, Γ is a smooth perturbation of $\gamma_* = \gamma_1^{u_*}$ so that if $Q(\epsilon) = J(u_* + \epsilon h) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_{*,t} + \epsilon h_t|_V^2 dt + \lambda q(\epsilon)$, we get

$$\begin{aligned} Q'(0) &= \int_0^1 \langle u_{*,t}, h_t \rangle dt + \lambda \int_{\mathbb{T}} \langle \partial_{\gamma_*} g_c(s), \partial_\epsilon \Gamma(s, 0) \rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle u_{*,t}, h_t \rangle dt + \lambda \int_{\mathbb{T}} \langle \partial_{\gamma_*} g_c(s), v^h \circ \gamma_1^{u_*} \rangle ds \end{aligned}$$

Using (7.16), we deduce that

$$\int_{\mathbb{T}} \langle \partial_{\gamma_*} g_c(s), v^h \circ \gamma_1^{u_*} \rangle ds = \int_0^1 \int_{\mathbb{T}} \langle (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^* (\partial_{\gamma_*} g_c(s)), h_t(\gamma_t^{u_*}(s)) \rangle ds dt.$$

Hence, introducing $p_t(s) = -\lambda (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^* (\partial_{\gamma_*} g_c(s))$, we get

$$Q'(0) = \int_0^1 \left\langle u_{*,t} - \int_{\mathbb{T}} K(\cdot, \gamma_t^{u_*}(s)) p_t(s) ds, h_t \right\rangle_V dt.$$

Since $J(u_*)$ is the minimum of J , $Q'(0) = 0$ for any $h \in H_1$ and we have

$$u_{*,t}(m) = \int_{\mathbb{T}} K(m, \gamma_t^{u_*}(s)) p_t(s) ds.$$

Since, $t \rightarrow \phi_t^{u_*}$ (resp. $t \rightarrow d\phi_t^{u_*}$) is a continuous path in $C^1(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$ (resp. in $C(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$), as soon a V is compactly embedded in $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ [53], we deduce that $t \rightarrow \gamma_t^{u_*}$ is continuous in $C(\mathbb{T}, \Omega)$, $t \rightarrow p_t$ in $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ and $t \rightarrow u_{*,t}$ in V . Thus, (2a) is proved.

The part (2b) is straightforward : Let us denote $\gamma_t = \gamma_t^{u_*}$. We first check that

$$u_{*,t}(\gamma_t) = \partial_{p_t} H(\gamma_t, p_t)$$

so that $\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}(s) = u_{t,*}(\gamma_t(s)) = \partial_{p_t} H(\gamma_t, p_t)$. Now, from

$$p_t(s) = -(d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*(\partial_{\gamma_*} g_c(s)) = (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*(p_1(s))$$

we get

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}(s) = \frac{\partial (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*}{\partial t}(p_1(s)) = -(d_{\gamma_t(s)} u_t)^*(p_t(s))$$

Since V is continuously embedded in $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, the kernel K is in $C_0^1(\Omega \times \Omega, M_2(\mathbb{R}))$ and

$$d_m u_{*,t} = \int_{\mathbb{T}} \partial_m K(m, \gamma_t(s')) p_t(s') ds'$$

so that

$$(d_{\gamma_t(s)} u_t)^*(p_t(s)) = \int_{\mathbb{T}} p_t(s) \partial_{\gamma_t(s)} K(\gamma_t(s), \gamma_t(s')) p_t(s') ds' = \partial_{\gamma_t} H(\gamma_t, p_t).$$

Now, from the previous expression of $\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}$ and $\frac{\partial p_t}{\partial t}$, one deduce easily that $t \rightarrow \gamma_t$ and $t \rightarrow p_t$ belongs to $C^1([0, 1], L^2([0, 1], \mathbb{R}^2))$.

The last thing to be proved is the normality of the momentum for geometric driving matching terms. Indeed, let $\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ such that $\alpha(s_i) = 0$ for any $0 \leq i < n$ where $0 = s_0 < \dots < s_n = 1$ is an admissible subdivision for γ_* . Let $\zeta(s, \epsilon)$ be the flow defined for any $s \in \mathbb{T}$ by $\zeta(s, 0) = s$ and

$$\partial_\epsilon \zeta(s, \epsilon) = \alpha(\zeta(s, \epsilon)).$$

Obviously the flow is defined for $\epsilon \in \mathbb{R}$ and $\zeta \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}, \mathbb{T})$ and satisfies $\zeta(s_i, \epsilon) = s_i$ for any $0 \leq i \leq n$ so that $\Gamma(s, \epsilon) = \gamma_*(\zeta(s, \epsilon))$ is a smooth perturbation in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ of γ_* . Since g_c is geometric, $g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon)) \equiv g_c(\gamma_*)$ so that

$$\int_{\mathbb{T}} \langle \partial_{\gamma_*} g_c(s), \partial_\epsilon \Gamma(s, 0) \rangle ds = \int_{\mathbb{T}} \langle \partial_{\gamma_*} g_c(s), \partial_s \gamma_*(s) \alpha(s) \rangle ds = 0$$

Considering all the possible choice for α , we deduce that $\langle \partial_{\gamma_*} g_c(s), \partial_s \gamma_*(s) \rangle = 0$ a.e. so that $\langle p_1(s), \partial_s \gamma_*(s) \rangle = 0$ a.e. Since $p_t(s) = (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*(p_1(s))$, we get

$$\langle p_t(s), \partial_s \gamma_t(s) \rangle = \langle p_1(s), d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*}(\partial_s \gamma_t(s)) \rangle = \langle p_1(s), \partial_s \gamma_*(s) \rangle$$

so that $\langle p_t(s), \partial_s \gamma_t(s) \rangle = 0$ a.e.

7.4 Application to measure based matching

7.4.1 Measure matching

We present here a first application of Theorem (1) for shape matching. This is a particular case of a more general framework introduced in [26] for measure matching.

Let $\mathcal{M}_s(\Omega)$ be the set of signed measures on Ω and consider I , a Hilbert space of functions on Ω , such that I is continuously embedded in $C_b(\Omega, \mathbb{R})$ the set of bounded continuous functions. Since $\mathcal{M}_s(\Omega)$ is the dual of $C_b(\Omega, \mathbb{R})$ and $I \xrightarrow{\text{cont.}} C_b(\Omega, \mathbb{R})$, we have $\mathcal{M}_s(\Omega) \xrightarrow{\text{cont.}} I^*$ where I^* is the dual of I . Define the action of diffeomorphisms on I^* , $(\phi, \mu) \rightarrow \phi.\mu$, by $(\phi.\mu, f) = (\mu, f \circ \phi)$, which, in the case when μ is a measure, yields

$$(\phi.\mu, f) \doteq \int f d(\phi.\mu) = \int f \circ \phi d\mu, \quad \forall f \in I \subset C_b(\Omega, \mathbb{R}).$$

The dual norm on I^* provides a nice way to compare two signed measures μ and ν :

$$|\mu|_{I^*} = \sup_{f \in I, |f|_I \leq 1} \int_{\Omega} f d\mu.$$

Introduce the self-reproducible kernel $(x, y) \mapsto k_I(x, y)$ on I , which is such that, for $f \in I$ and $x \in \Omega$,

$$f(x) = \langle f, k_I(x) \rangle_I$$

with $k_I(x) : y \mapsto k_I(x, y)$. We have

$$\langle \mu, \nu \rangle_{I^*} = \int_{\Omega \times \Omega} k_I(x, y) d\mu(x) d\nu(y). \quad (7.17)$$

Indeed,

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} \langle f, k_I(x) \rangle_I d\mu(x) = \left\langle f, \int_{\Omega} k_I(x, \cdot) d\mu(x) \right\rangle_I$$

which is maximized for $f(y) = \frac{1}{C} \int_{\Omega} k_I(x, y) d\mu(x)$ with

$$C = \left| \int_{\Omega} k_I(\cdot, x) d\mu(x) \right|_I$$

so that $|\mu|_{I^*} = C$. Now, we have

$$C^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle k_I(x), k_I(y) \rangle_I d\mu(x) d\mu(y) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} k_I(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$$

from the properties of a reproducible kernel. This proves (7.17).

Coming back to the shape matching problem, for any curve $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$, we define $\mu_{\gamma} \in \mathcal{M}_s(\Omega)$ by

$$\int_{\Omega} f d\mu_{\gamma} = \int_{\mathbb{T}} f \circ \gamma(s) ds.$$

When S is a Jordan shape and γ is a parametrization with constant speed, μ_γ is a uniform measure on ∂S (a probability measure if properly normalized). More generally, given a compact submanifold M of dimension k , one can associate with M the uniform probability measure denoted μ_M . This measure framework is useful also to represent finite union of submanifolds of different dimensions or more irregular structures (see [26]). Moreover, this allows various approximation schemes since for any reasonable sampling process over the manifold M , $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \rightarrow \mu_M$. We focus on the simple case of 2D shape modeling but instead of working with the approximation scheme $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ (by uniform sampling on the curve) we will work with a continuous representation as a 1D measure μ_γ where $S = S_\gamma$. We introduce as in [26] the following energy :

$$\begin{aligned} J(u) &\doteq \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V dt + \frac{\lambda}{2} |\phi_1^u \cdot \mu_{\partial S_{temp}} - \mu_{\partial S_{targ}}|_{I^*}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 |v_t|_V dt + \frac{\lambda}{2} |\phi_1^u \cdot \mu_{\gamma_{temp}} - \mu_{\gamma_{targ}}|_{I^*}^2 \end{aligned}$$

where γ_{temp} (resp. γ_{targ}) is a constant speed parametrization of S_{temp} (resp. S_{targ}).

Note that for any $f \in I$,

$$\int f d(\phi \cdot \mu_\gamma) = \int f \circ \phi d\mu_\gamma = \int f \circ \phi \circ \gamma ds = \int f d(\mu_{\phi \circ \gamma})$$

so that, with

$$g_c(\gamma) = \frac{1}{2} |\mu_\gamma - \mu_{\gamma_{targ}}|_{I^*}^2,$$

minimizing J is a variational problem which is covered by Theorem 1. It is clear that g_c is not geometric since, in general, $\mu_{\gamma \circ \zeta} \neq \mu_\gamma$ for a change of variable $\zeta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. However, this approach provides a powerful matching algorithm between unlabelled sets of points and submanifolds.

Let $p \geq k \geq 0$ and consider Γ a smooth perturbation of a curve $\gamma \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$. Then if $v(s) = \partial_\epsilon \Gamma(s, 0)$ and $q(\epsilon) = g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$ we get immediately

$$q'(0) = \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} \langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(s')) - \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(s')), v(s) \rangle ds ds'$$

giving

$$\partial_\gamma g_c(s) = \int_{\mathbb{T}} (\partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(s')) - \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(s'))) ds'$$

Theorem 1 can therefore be directly applied, yielding

Theorem 2 *Let $p \geq k \geq 0$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Let I be a Hilbert space of real valued functions on Ω and assume that I is continuously embedded*

in $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Let S_{temp} and S_{targ} be two Jordan shapes in $\mathcal{S}^k(\Omega)$. Then the conclusions of theorem 1 are true, with

$$p_1(s) = -\lambda \partial_{\gamma_1} g_c(s) = \int_{\mathbb{T}} (\partial_{\gamma_1(s)} k_I(\gamma_1(s), \gamma_{targ}(s')) - \partial_{\gamma_1(s)} k_I(\gamma_1(s), \gamma_1(s'))) ds'$$

From theorem 1, we have $p_t = (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*(p_1)$, and since $p \geq k$, inherits the smoothness properties of p_1 . Now, if $0 \leq s_0 < \dots < s_n = 1$ is an admissible partition of γ_{temp} (ie S_{temp} has a C^k boundary except at a finite number $\gamma_{temp}(s_0), \dots, \gamma_{temp}(s_n)$ of possible ‘‘corners’’) then p_1 is continuous and p_1 restricted to $[s_i, s_{i+1}]$ is C^k , and this conclusion is true also for all p_t .

7.4.2 Geometric measure-based matching

As said before, the previous formulation is not geometric and in particular, μ_{γ_*} is not generally the uniform measure on $S_* = \phi_1^{u_*}(S_{temp})$ ie $\mu_{\gamma_*} \neq \mu_{S_*}$. If we want to consider a geometric action, we can propose a new data term, derived from the previous one, which is now fully geometric

$$g_c(\gamma) = \frac{1}{2} |\mu_{\partial S_\gamma} - \mu_{\partial S_{targ}}|_{I^*}^2$$

or equivalently

$$\begin{aligned} g_c(\gamma) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) |\gamma'(s)| |\gamma'(r)| ds dr \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma_{targ}(s), \gamma_{targ}(r)) |\gamma_{targ}'(s)| |\gamma_{targ}'(r)| ds dr \\ & - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)) |\gamma'(s)| |\gamma_{targ}'(r)| ds dr \end{aligned} \quad (7.18)$$

The main difference from the previous non geometric matching term is the introduction of speed of γ and γ_{targ} in the integrals (with the notation $\gamma'(s) = \partial_s \gamma(s)$).

The derivative of $g_c(\gamma)$ under a smooth perturbation Γ of γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ for $k \geq 2$ can be computed. Note first that for $\gamma \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$ and $k \geq 2$, we can define for any $s \in \mathbb{T} \setminus \{s_0, \dots, s_n\}$ (where $0 = s_0 < \dots < s_n = 1$ is an admissible subdivision of γ), the Frenet frame (τ_s, n_s) along the curve, and the curvature κ_s . In the following we will use the relations $\gamma'(s) = |\gamma'(s)| \tau_s$ and $\partial_s \tau_s = \kappa_s |\gamma'(s)| n_s$. Let Γ be a smooth perturbation of γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ for $k \geq 2$. As previously, we will note $v(s) = \partial_\epsilon \Gamma(s, 0)$. Since Γ is C^1 , we have $\partial_s v(s) = \partial_\epsilon (\gamma'(s, \epsilon))|_{\epsilon=0}$. Then, if $q(\epsilon) = g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$, assuming that $k_I \in C^1(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} q'(0) = & \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)), v(s) \rangle |\gamma'(s)| + k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle \tau_s, \partial_s v(s) \rangle] |\gamma'(r)| ds dr \\ & - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)), v(s) \rangle |\gamma'(s)| + k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)) \langle \tau_s, \partial_s v(s) \rangle] |\gamma_{targ}'(r)| ds dr. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Consider the term $\int_{\mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle \tau_s, \partial_s v(s) \rangle ds$. Integrating by parts on each $[s_i, s_{i+1}]$ yields

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle \tau_s, \partial_s v(s) \rangle ds &= \sum_{i=0}^n k_I(\gamma(s_i), \gamma(r)) \langle -\delta\tau_i, v(s_i) \rangle \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}} \langle [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)), \tau(s) \rangle \tau_s + k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \kappa_s n_s], v(s) \rangle |\gamma'(s)| ds, \end{aligned} \quad (7.20)$$

where $\delta\tau_i = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{s_i+r} - \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{s_i-r}$. Since we have allowed corners in our model of shapes, the boundary terms of the integration do not vanish, and consequently g_c is not Γ -differentiable, unless we allow *singular terms* (Dirac measures) in the gradient, which is possible but will not be addressed here. In the case of smooth curves, the singular terms cancel and we have

Theorem 3 *Let $p \geq k \geq 2$ and assume $V \xrightarrow{comp.} C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$ and $I \xrightarrow{cont.} C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. Let S_{temp} and S_{targ} be two C^k Jordan shapes. Then, the conclusions of theorem 1 are valid for*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \frac{\lambda}{2} |\mu_{\partial S_\gamma} - \mu_{\partial S_{\text{targ}}}|_{I^*}^2$$

with

$$\begin{aligned} p_1(s) &= -\lambda \left[\int_{\mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma_1(s)} k_I(\gamma_1(s), \gamma_1(r)), n_s \rangle - k_I(\gamma_1(s), \gamma_1(r)) \kappa_s] |\gamma_1'(r)| dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma_1(s)} k_I(\gamma_1(s), \gamma_{\text{targ}}(r)), n_s \rangle - k_I(\gamma_1(s), \gamma_{\text{targ}}(r)) \kappa_s] |\gamma_{\text{targ}}'(r)| dr \right] |\gamma_1'(s)| n_s. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Moreover, p_t is at all times normal to the boundary of γ_t .

The normality of p_t at all times is a direct consequence of theorem 1, but can be seen directly from the fact that p_1 is normal to γ_1 and from the equations $p_t = (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*(p_1)$ and $\gamma_t = \phi_{1,t}(\gamma_1)$.

7.4.3 Current-based matching

The driving term can be modified to tackle with the singularity issues previously encountered. Define

$$\begin{aligned} g_c(\gamma) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle \gamma'(s), \gamma'(r) \rangle ds dr \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma_{\text{targ}}(s), \gamma_{\text{targ}}(r)) \langle \gamma_{\text{targ}}'(s), \gamma_{\text{targ}}'(r) \rangle ds dr \\ &\quad - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma_{\text{targ}}(r)) \langle \gamma'(s), \gamma_{\text{targ}}'(r) \rangle ds dr, \end{aligned} \quad (7.22)$$

i.e. we replace products of scalar velocities by dot products of vector velocities. This formulation is also geometric and correspond actually to one-dimensional current matching, as defined in chapter 5. Indeed, given a curve γ , the associated current $\vec{\mu}_\gamma$ satisfies, for any continuous 1-form ω (see (5.3)) :

$$\langle \vec{\mu}_\gamma | \omega \rangle = \int_{\mathbb{T}} \omega(\gamma(s))(n_s) |\gamma'(s)| ds,$$

since $|\gamma'(s)|ds$ is the lenght element along the curve. Now, following the notations of chapter 5, consider the Hilbert space W of differential forms given by the scalar reproducing kernel k_I , i.e. $k_W(x, y) : \eta \mapsto k_I(x, y)\eta$. The dual norm $\|\vec{\mu}_\gamma\|_{W^*}$ is then given by

$$\begin{aligned} \|\vec{\mu}_\gamma\|_{W^*}^2 &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle n_s, n_r \rangle |\gamma'(s)| |\gamma'(r)| ds dr \\ &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle \gamma'(s), \gamma'(r) \rangle ds dr. \end{aligned}$$

Therefore, in this setting, our new expression (7.22) is exactly the data attachment term of current matching :

$$g_c(\gamma) = \frac{1}{2} \|\vec{\mu}_\gamma - \vec{\mu}_{\gamma_{targ}}\|_{W^*}^2.$$

Let Γ be a smooth perturbation of γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ for $k \geq 1$, and denote $v(s) = \partial_\epsilon \Gamma(s, 0)$ and $q(\epsilon) = g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$ as before. We have

$$\begin{aligned} q'(0) &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)), v(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma'(r) \rangle \\ &\quad + k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \langle \partial_s v(s), \gamma'(r) \rangle] ds dr \\ &\quad - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)), v(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma_{targ}'(r) \rangle \\ &\quad + k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)) \langle \partial_s v(s), \gamma_{targ}'(r) \rangle] ds dr \quad (7.23) \end{aligned}$$

Integrating by parts on each $[s_i, s_{i+1}]$ the second part of each integral,

$$\begin{aligned} q'(0) &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)), v(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma'(r) \rangle \\ &\quad - \langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)), \gamma'(s) \rangle \langle v(s), \gamma'(r) \rangle] ds dr \\ &\quad - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} [\langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)), v(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma_{targ}'(r) \rangle \\ &\quad - \langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)), \gamma'(s) \rangle \langle v(s), \gamma_{targ}'(r) \rangle] ds dr. \quad (7.24) \end{aligned}$$

Hence in this case we get a Γ -derivative

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_c(s) &= \int_{\mathbb{T}} [\langle \gamma'(s), \gamma'(r) \rangle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) - \langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)), \gamma'(s) \rangle \gamma'(r)] dr \\ &- \int_{\mathbb{T}} [\langle \gamma'(s), \gamma_{targ}'(r) \rangle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)) - \langle \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)), \gamma'(s) \rangle \gamma_{targ}'(r)] dr. \end{aligned} \quad (7.25)$$

As expected, this can be rewritten to get an expression which is purely normal to the curve γ . Indeed,

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_c(s) &= \left[\int_{\mathbb{T}} \langle n_r, \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma(r)) \rangle |\gamma'(r)| dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{T}} \langle n_r^{targ}, \partial_{\gamma(s)} k_I(\gamma(s), \gamma_{targ}(r)) \rangle |\gamma_{targ}'(r)| dr \right] |\gamma'(s)| n_s. \end{aligned} \quad (7.26)$$

This implies

Theorem 4 *Let $p \geq k \geq 1$ and assume $V \xrightarrow{comp.} C_0^p(\Omega, \mathbb{R})$ and $I \xrightarrow{cont.} C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. Let S_{temp} and S_{targ} be two Jordan shapes in $\mathcal{S}^k(\Omega)$. Then the conclusions of theorem 1 hold for*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \frac{\lambda}{2} |\vec{\mu}_{\phi_1^u \circ \gamma_{temp}} - \vec{\mu}_{\gamma_{targ}}|_{I^*}^2$$

with

$$\begin{aligned} p_1(s) &= -\lambda \left[\int_{\mathbb{T}} \langle n_r, \partial_{\gamma_1(s)} k_I(\gamma_1(s), \gamma_1(r)) \rangle |\gamma_1'(r)| dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{T}} \langle n_r^{targ}, \partial_{\gamma_1(s)} k_I(\gamma_1(s), \gamma_{targ}(r)) \rangle |\gamma_{targ}'(r)| dr \right] |\gamma_1'(s)| n_s. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Moreover, p_t is at all times normal to the boundary of γ_t , continuous and C^{k-1} on any interval on which γ_{temp} is C^k .

7.5 Application to shape matching via binary images

7.5.1 Shape matching via binary images

An other natural way to build a geometric driving matching term is to consider, for any shape S , the binary image χ_S such that $\chi_S(m) = 1$ if $m \in S$ and 0 otherwise. Then the usual L^2 matching term between images $(\int_\Omega (I_{temp} \circ \phi^{-1} - I_{targ})^2 dm)$ leads to the area of the set symmetric difference $\int_\Omega |\chi_{\phi(S_{temp})} - \chi_{S_{targ}}| dm$. Introducing

$$g_c(\gamma) = \int_\Omega |\chi_{S_\gamma} - \chi_{S_{targ}}| dm$$

we get an obviously geometric driving matching term leading to the definition of

$$J(u) = \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda \int_{\Omega} |\chi_{S_{\gamma_1^u}} - \chi_{S_{targ}}| dm.$$

where $\gamma_1^u = \phi_1^u \circ \gamma_{temp}$. The problem of diffeomorphic image matching has been quite extensively studied in the case of sufficiently smooth images in ([37], [53], [8]). It has been proved that the momentum, p_0 , is a function defined on Ω of the form $p_0 = \alpha \nabla I_{temp}$, where $\alpha = |d\phi_{0,1}^{u*}|(I_{temp} - I_{targ} \circ \phi_{0,1}^{u*}) \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$. This particular expression $\alpha \nabla I_{temp}$ shows that the momentum is normal to the level sets of the template image, and vanishes on regions over which I_{temp} is constant. (This property is conserved over time for the deformed images I_t . This is what we called the normal momentum constraint [38].) In the case of binary images, we lose the smoothness property since ∇I_{temp} is singular and much less was known except that the momentum is a distribution whose support is concentrated on the boundary of S_{temp} . We show in this section that this distribution is as simple as it could be, and is essentially an L^2 function on the boundary of the template, or using a parametrization (and with a slight abuse of notation), an element of $p_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ which is everywhere normal to the boundary.

The main idea is to proceed like in Theorem 1, but we here have to deal with the fact that g_c is not Γ -differentiable in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ (but it is lower semi-continuous for $k \geq 1$). We need to introduce for this the weaker notion of Γ -semi-differentiability and a proper extension of Theorem 1.

7.5.2 Momentum Theorem for semi-differentiable driving matching term

We start with the definition of the Γ -semi-differentiability.

Définition 20 Let $g_c : \mathcal{C}_p^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$. We say that g_c is Γ -semi differentiable at γ if for any smooth perturbation Γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ of γ , $q(\epsilon) \doteq g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$ has a right derivative at $\epsilon = 0$. We say that g_c has Γ -semi-derivatives upper bounded by B if B is a bounded subset of $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ such that for any smooth perturbation Γ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ of γ , there exists $b \in B$ such that

$$q'(0+) \leq \int_{\mathbb{T}} \langle b(s), \partial_c \Gamma(s, 0) \rangle ds.$$

Under this weaker condition, we can prove the following extension of Theorem 1 :

Theorem 5 Let $p \geq k \geq 0$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$ and let $g_c : \mathcal{C}_p^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ be lower semi-continuous on $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ ie $\liminf g_c(\gamma_n) \geq g_c(\gamma)$ for any sequence $\gamma_n \xrightarrow{\mathcal{C}_p^k(\Omega)} \gamma$.

1. Let $H_1 = L^2([0, 1], V)$. There exists $u_* \in H_1$ such that $J(u_*) = \min_{u \in H_1} J(u)$ where

$$J(u) = \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda g_c(\phi_1^u \circ \gamma_{\text{temp}}).$$

2. Assume that g_c is Γ -semi-differentiable in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ at $\gamma_* = \phi_1^{u_*} \circ \gamma_{\text{temp}}$ with Γ -semi-derivative upper bounded by $B \subset L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$. Then, the solution u_* is in fact in $C^1([0, 1], V)$ and there exist $(\gamma_t, p_t) \in \mathcal{C}_p^k(\Omega) \times L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ such that

(a) $\gamma_0 = \gamma_{\text{temp}}, p_1 = -\lambda b$ with $b \in \overline{\text{conv}(B)}$ and for any $t \in [0, 1]$

$$u_{*,t}(m) = \int_{\mathbb{T}} K(m, \gamma_t(s)) p_t(s) ds, \quad \gamma_t = \phi_t^{u_*} \circ \gamma_{\text{temp}} \quad \text{and} \quad p_t = (d_{\gamma_t} \phi_{t,1}^{u_*})^*(p_1)$$

where $\phi_{s,t}^u = \phi_t^u \circ (\phi_s^u)^{-1}$ and K is the reproducible kernel associated with V .

(b) γ_t and p_t are solutions in $C^1([0, 1], L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2))$ of

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \partial_p H(\gamma, p) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\partial_\gamma H(\gamma, p) \end{cases} \quad (7.28)$$

where $H(\gamma, p) = \frac{1}{2} \int \int^t p(y) K(\gamma(y), \gamma(x)) p(x) dx dy$.

Proof (Theorem 5) The proof of the Theorem 5 follows closely the lines of the proof of Theorem 1. In particular, introduce F and G as in equations (7.12) and (7.13), and for $u \in H_1$, consider $\partial_u F$ defined by (7.15) and (7.16). We focus on the proof of point (2), since point (1) does not differ from Theorem 1. Let $h \in H_1$, $\eta > 0$, $|\epsilon| < \eta$ and $\Gamma(s, \epsilon) = \gamma_1^{u_* + \epsilon h}(s)$ where $\gamma_t^u = \phi_t^u \circ \gamma_{\text{temp}}$. The mapping Γ is a smooth perturbation of $\gamma_* = \gamma_1^{u_*}$ in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ and if $Q(\epsilon) = J(u_* + \epsilon h) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_{*,t} + \epsilon h_t|_V^2 dt + \lambda q(\epsilon)$ where $q(\epsilon) \doteq g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$, we deduce from the hypothesis that there exists $b \in B$ such that

$$Q'(0+) \leq \int_0^1 \langle u_t, h_t \rangle dt + \int_{\mathbb{T}} \langle b(s), \partial_\epsilon \Gamma(s, 0) \rangle ds = \langle \partial_{u_*} F(h), \bar{b} \rangle_{H_2}$$

where $H_2 = \mathbb{R} \times L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ and $\bar{b} = (1, b)$. We need now the following lemma :

Lemma 1 Let $F : H_1 \rightarrow M$ and $G : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be two mappings where H_1 is a separable Hilbert space. Let us assume the following :

(H1) There exists $u_* \in H_1$ such that

$$G \circ F(u_*) = \inf_{u \in H_1} G \circ F(u) < +\infty.$$

(H2) There exists a linear mapping, denoted $\partial_{u_*} F : H_1 \rightarrow H_2$ where H_2 is a separable Hilbert space and a bounded subset $D \subset H_2$ such that for any $h \in H_1$ there exists $\bar{p} \in D$ such that

$$(G \circ F)'(u_* + 0h) \leq \langle \bar{b}, \partial_{u_*} Fh \rangle \quad (7.29)$$

Then, there exists $\bar{b}_* \in \overline{\text{conv}(D)}$, the closure in H_2 of the convex hull of D , such that for any $h \in H_1$

$$\langle \bar{b}_*, \partial_{u_*} Fh \rangle = 0. \quad (7.30)$$

Proof Let \tilde{E} be the closure in H_2 of the linear space $\partial_{u_*} F(H_1)$ and π the orthogonal projection on \tilde{E} . Now, let $C = \overline{\text{conv}(D)}$. From (H2), we get that C is a non-empty bounded closed convex subset of H_2 so that we deduce from corollary III.19 in [12] that C is weakly compact. Now, π is continuous for the weak topology so that $\tilde{C} = \pi(C)$ is weakly compact and thus strongly closed. From the projection theorem on closed non-empty convex subsets of an Hilbert space (Theorem V2 in [12]), we deduce that there exist $\tilde{b}_* \in \tilde{C}$ such that $|\tilde{b}_*| = \inf_{\tilde{b} \in \tilde{C}} |\tilde{b}|$ and $\langle \tilde{b}_*, \tilde{b} - \tilde{b}_* \rangle \geq 0$ for any $\tilde{b} \in \tilde{C}$. Considering $\bar{b}_* \in C$ such that $\pi(\bar{b}_*) = \tilde{b}_*$ we deduce eventually that for any $\bar{b} \in C$,

$$|\tilde{b}_*|^2 = \langle \tilde{b}_*, \bar{b}_* \rangle \leq \langle \tilde{b}_*, \bar{b} \rangle. \quad (7.31)$$

Assume that $\tilde{b}_* \neq 0$, and let $h \in H_1$ such that $|\tilde{b}_* + \partial_{u_*} Fh| \leq |\tilde{b}_*|^2/2M$ where $\sup_{\bar{b} \in C} |\bar{b}| \leq M < \infty$. From (H2), there exists $\bar{b} \in C$ such that

$$(G \circ F)'(u_* + 0h) \leq \langle \bar{b}, \partial_{u_*} Fh \rangle \leq (|\tilde{b}_*|^2/2 - \langle \bar{b}, \tilde{b}_* \rangle)$$

so that using (7.31), we get

$$(G \circ F)'(u_* + 0h) \leq -|\tilde{b}_*|^2/2 < 0$$

which is in contradiction with (H1).

Hence $\tilde{b}_* = 0$ and \bar{b}_* is orthogonal to \tilde{E} which gives the result. □

Using the lemma, we deduce that there exists $b \in B$ such that for any $h \in H_1$,

$$\int_0^1 \langle u_{*,t}, h_t \rangle_V dt + \lambda \int_{\mathbb{T}} \langle b(s), v^h(\gamma(s)) \rangle ds = 0$$

where

$$v^h = \int d_{\phi_{1,t}^{u_*}} \phi_{t,1}^{u_*} h_t \circ \phi_{1,t}^{u_*} dt.$$

Denoting $p_t(s) = -\lambda(d_{\gamma_t(s)} \phi_{t,1}^{u_*})^*(b(s))$, we get eventually for any $h \in H_1$

$$\int_0^1 \langle u_{*,t} - \int_{\mathbb{T}} K(\cdot, \gamma_t^{u_*}(s)) p_t(s) ds, h_t \rangle_V dt = 0.$$

so that

$$u_{*,t}(m) = \int_{\mathbb{T}} K(m, \gamma_t^{u_*}(s)) p_t(s) ds. \quad (7.32)$$

Given this representation of $u_{*,t}$ the remaining of the proof of Theorem 5 is identical to Theorem 1.

□

7.5.3 Momentum description for shape matching via binary images

Coming back to the case of the driving matching term g_c defined by

$$g_c(\gamma) = \int_{\Omega} |\chi_{S_\gamma} - \chi_{S_{\text{targ}}}| dm,$$

the Γ -semi-differentiability is given in the following proposition :

Proposition 37 *Let $p \geq k \geq 1$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Let S_{targ} be a Jordan shape in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ and $g_c : \mathcal{C}_p^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ such that*

$$g_c(\gamma) = \int_{\Omega} |\chi_{S_\gamma} - \chi_{S_{\text{targ}}}| dm.$$

Let $\gamma_1 \in \mathcal{C}_p^k(\Omega)$ be positively oriented. Denote $\mathbb{T}_0 = \{ s \in \mathbb{T} \mid \gamma_1(s) \notin \partial S_{\text{targ}} \}$ and $\mathbb{T}_+ = \{ s \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_0 \mid n_{\text{targ}}(\gamma_1(s)) \text{ and } n_1(\gamma_1(s)) \text{ exist and } n_1(\gamma_1(s)) = n_{\text{targ}}(\gamma_1(s)) \}$, n^1 and n_{targ} being the outwards normals to the boundaries of S_{γ_1} and S_{targ} (which are well-defined except at a finite number of locations).

Then, g_c is Γ -semi-differentiable at γ_1 and for any smooth perturbation Γ of γ_1 in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$, if $q(\epsilon) = g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$, we have

$$q'(0+) \leq \int_{\mathbb{T}_0} (1 - 2\chi_{S_{\text{targ}}}(\gamma_1(s)) \langle \partial_\epsilon \Gamma(s, 0), n_1(\gamma_1(s)) \rangle) |\partial_s \gamma_1| ds + \int_{\mathbb{T}_+} |\langle \partial_\epsilon \Gamma(s, 0), n_1(\gamma_1(s)) \rangle| |\partial_s \gamma_1| ds. \quad (7.33)$$

Moreover, if $B = \{ b \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2) \mid b(s) = (1 - 2\chi_{S_{\text{targ}}}(\gamma_1(s))) n_1(\gamma_1(s)) \text{ for } \gamma_1(s) \notin \partial S_{\text{targ}} \text{ and } |b(s)| \leq 1 \text{ otherwise } \}$, then the Γ -semi-derivatives of g_c at γ_1 are upper bounded by B .

Proof (Proposition 37) Let Γ be a smooth perturbation of γ_1 in $\mathcal{C}_p^k(\Omega)$ and let $v(s) = \partial_\epsilon \Gamma(s, 0)$. Denote for any $\epsilon \in]-\eta, \eta[$, $S_\epsilon = S_{\Gamma(\cdot, \epsilon)}$, $S'_\epsilon = \Omega \setminus \overline{S_\epsilon}$ so that $S_0 = S_{\gamma_1}$ and

$$\int_{\Omega} |\chi_{S_\epsilon} - \chi_{S_{\text{targ}}}| dm = \int_{S_\epsilon} |1 - \chi_{S_{\text{targ}}}| dm + \int_{S'_\epsilon} |0 - \chi_{S_{\text{targ}}}| dm = \int_{S_\epsilon} (1 - 2\chi_{S_{\text{targ}}}) dm + \text{Cst}$$

The proof relies on the following remark : for any bounded measurable function f on Ω , we have :

$$\int_{S_\epsilon} f(m)dm - \int_{S_0} f(m)dm = \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{T}} f \circ \Gamma(s, \alpha) |\partial_\alpha \Gamma, \partial_s \Gamma|(s, \alpha) ds d\alpha$$

where $|a, b|$ denotes $\det(a, b)$ for $a, b \in \mathbb{R}^2$. If Γ is C^1 and f is smooth, one can assume that there exists a diffeomorphism ϕ_ϵ such that $\phi_0 = \text{id}$ and for $\Gamma(s, \epsilon) = \phi_\epsilon(\Gamma(s, 0))$ in which case the result is a consequence of the divergence theorem ([18]). The general case can be derived by density arguments that we skip to avoid technicalities.

Denote, for any $a, m \in \mathbb{R}^2$,

$$\chi_{S_{targ}}^a(m) = \limsup_{t \rightarrow 0, t > 0} \chi_{S_{targ}}(m + ta)$$

Since $S_{targ} \in \mathcal{S}^k(\Omega)$, we can define n_m , the outwards normal to the boundary of S_{targ} everywhere except in a finite number of locations and we get immediately that $\chi_{S_{targ}}^a(m) = \chi_{S_{targ}}(m)$ for $m \notin \partial S_{targ}$ and $\chi_{S_{targ}}^a(m) = (1 - \text{sgn}(\langle a, n_{targ}(m) \rangle))/2$ for $\langle a, n_m \rangle \neq 0$.

Let $\mathbb{T}' = \{s \in \mathbb{T} \mid \gamma_1(s) \in \partial S_{targ}, \langle v(s), n_{targ}(\gamma_1(s)) \rangle = 0\}$. There can be at most a finite number of points $s \in \mathbb{T}'$ such that $\langle \partial_s \gamma_1, n_{targ}(\gamma_1(s)) \rangle \neq 0$, since this implies that s is isolated in \mathbb{T}' . For all other $s \in \mathbb{T}'$, we have $\langle \partial_s \gamma_1, n_{targ}(\gamma_1(s)) \rangle = 0$ and $|v(s), \partial_s \gamma_1| = 0$ so that

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} (1 - 2\chi_{S_{targ}} \circ \Gamma(s, \alpha)) |\partial_\alpha \Gamma, \partial_s \Gamma|(s, \alpha) = 0 \quad (= (1 - 2\chi_{S_{targ}}^{v(s)} \circ \gamma_1(s)) |v(s), \partial_s \gamma_1|) \quad (7.34)$$

We check easily that if $s \notin \mathbb{T}'$, then $\gamma_1(s) \notin \partial S_{targ}$ or $\gamma_1(s) \in \partial S_{targ}$ and $\langle v(s), n_{targ}(\gamma_1(s)) \rangle \neq 0$, so that

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0, \alpha > 0} (1 - 2\chi_{S_{targ}} \circ \Gamma(s, \alpha)) |\partial_\alpha \Gamma, \partial_s \Gamma|(s, \alpha) = (1 - 2\chi_{S_{targ}}^{v(s)} \circ \gamma_1(s)) |v(s), \partial_s \gamma_1| \quad (7.35)$$

Using the dominated convergence theorem and equations (7.34) and (7.35), we deduce

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{S_\epsilon} (1 - 2\chi_{S_{targ}}) dm - \int_{S_0} (1 - 2\chi_{S_{targ}}) dm \right) = \int_{\mathbb{T}} (1 - 2\chi_{S_{targ}}^{v(s)} \circ \gamma_1(s)) |v(s), \partial_s \gamma_1| ds \quad (7.36)$$

Considering \mathbb{T}_0 , \mathbb{T}_+ and $\mathbb{T}_- = \mathbb{T} \setminus (\mathbb{T}_0 \cup \mathbb{T}_+)$ as introduced in Theorem 37 we get

$$\begin{aligned} q'(0+) &= \int_{\mathbb{T}_0} (1 - 2\chi_{S_{targ}}(\gamma_1(s))) \langle v(s), n_1(\gamma_1(s)) \rangle |\partial_s \gamma_1| ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}_+} |\langle v(s), n_1(\gamma_1(s)) \rangle| |\partial_s \gamma_1| ds - \int_{\mathbb{T}_-} |\langle v(s), n_1(\gamma_1(s)) \rangle| |\partial_s \gamma_1| ds \end{aligned} \quad (7.37)$$

which ends the proof of Proposition 37.

□

Given Proposition 37, we can apply immediatly Theorem 5 and get a precise description of the initial momentum.

Theorem 6 *Let $p \geq k \geq 1$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Let S_{temp} and S_{targ} be two Jordan shapes in $\mathcal{S}^k(\Omega)$. Then the conclusions of theorem 5 hold for*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda \int_{\Omega} |\chi_{S_{\gamma_1^u}} - \chi_{S_{\text{targ}}}| dm.$$

with

$$p_1(s) = \lambda \beta_1(s) |\partial_s \gamma_1| n_1(s)$$

where

$$\beta_1(s) = (2\chi_{S_{\text{targ}}} - 1) \circ \gamma_1(s) \text{ if } \gamma_1(s) \in \Omega \setminus \partial S_{\text{targ}} \quad (7.38)$$

and $|\beta_1(s)| \leq 1$ for all s . Here where n_1 is the outwards normal to the boundary ∂S_{γ_1} (which is defined everywhere except on a finite number of points).

Proof This is a direct consequence of Proposition 37 and Theorem 5.

□

Using the fact that $p_t(s) = (d_{\gamma_t(s)} \phi_{t,1}^{u*})^*(p_1(s))$ a straightforward computation gives

$$p_0(s) = \lambda \beta_1(s) |d_{\gamma_0(s)} \phi_{0,1}^{u*}| |\partial_s \gamma_0| n_{\gamma_0(s)}^0,$$

where n^0 is the outwards normal to ∂S_{temp} . In particular, assuming an arc-length parametrization of the boundary of S_{temp} , we get that the norm of the inital momentum is exactly equal to the value of the Jacobian of the optimal matching at any location $s \in \mathbb{T}_0$ (see Proposition 37) along the boundary.

7.6 Application to driving terms based on a potential

In this section, we consider the case

$$g_c(\gamma) = \int_{\gamma} U_{\text{targ}}(x) dx = \int_{\mathbb{T}} U_{\text{targ}}(\gamma(s)) |\gamma'(s)| ds$$

where $U_{\text{targ}} \geq 0$ is a function, depending on the target shape, which vanishes only for $x \in \partial S_{\text{targ}}$, the main example being the distance function $U_{\text{targ}}(x) = \text{dist}(\partial S_{\text{targ}}, x)$.⁴ However, before dealing specifically with the distance function, we first address the simpler case of smooth U_{targ} . We moreover restrict to smooth templates (without corners) to avoid the introduction of additional singularities. Then, an easy consequence of theorem 1 is

⁴This can be seen as a form of *diffeomorphic active contours* since the potential U_{targ} can obviously arise from other contexts, for example from the locations of dicontinuities within an image.

Theorem 7 *Let $p \geq k \geq 2$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Let S_{temp} be a C^2 Jordan shape and U_{targ} be a C^1 function in \mathbb{R}^2 . Then the conclusions of theorem 1 hold for*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda \int_{\mathbb{T}} U_{\text{targ}}(\gamma_1(s)) |\partial_s \gamma_1| ds$$

with

$$p_1 = -\lambda |\gamma_1'(s)| (\nabla_{\gamma_1(s)}^\perp U_{\text{targ}} - U_{\text{targ}}(\gamma_1(s)) \kappa_1(s) n_1(s))$$

where n_1 is the normal to γ_1 , κ_1 is the curvature on γ_1 and $\nabla_{\gamma_1(s)}^\perp U_{\text{targ}}$ is the normal component of the gradient of U_{targ} to γ_1 .

Proof

The hypothesis on U_{targ} obviously implies the continuity of g_c . Let γ be a C^2 curve and Γ a smooth perturbation of γ . The derivative at 0 of the function $q(\epsilon) = g_c(\Gamma(\cdot, \epsilon))$ is (letting $v(s) = \partial_\epsilon \Gamma(s, 0)$) :

$$\begin{aligned} q'(0) &= \int_{\mathbb{T}} (\langle \nabla_{\gamma(s)} U_{\text{targ}}, v(s) \rangle |\gamma_1'(s)| + U_{\text{targ}}(\gamma(s)) \langle \tau_s, \partial_s v \rangle) ds \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\langle \nabla_{\gamma(s)} U_{\text{targ}} - \langle \nabla_{\gamma(s)} U_{\text{targ}}, \tau_s \rangle \tau_s, v(s) \rangle - \langle U_{\text{targ}}(\gamma(s)) \kappa_s n_s, v(s) \rangle) |\gamma_1'(s)| ds \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\langle \nabla_{\gamma(s)}^\perp U_{\text{targ}}, v(s) \rangle - \langle U_{\text{targ}}(\gamma(s)) \kappa_s n_s, v(s) \rangle) |\gamma_1'(s)| ds \end{aligned}$$

where the second equation comes from an integration by parts. This proves theorem 7. \square

Now, consider the case $U_{\text{targ}} = \text{dist}(\partial S_{\text{targ}}, \cdot)$. This function has singularities on ∂S_{targ} and on the so-called symmetry set, denoted $\hat{\Sigma}_{\text{targ}}$, which consists in points $m \in \mathbb{R}^2$ which have at least two closest points in ∂S_{targ} . Denote

$$\partial U_{\text{targ}}(m + 0^+ h) \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} (U_{\text{targ}}(m + \epsilon h) - U_{\text{targ}}(m)) / \epsilon$$

when the limit exists. We assume that there is a subset $\Sigma_{\text{targ}} \subset \hat{\Sigma}_{\text{targ}}$ such that

- $\hat{\Sigma}_{\text{targ}} \setminus \Sigma_{\text{targ}}$ has a finite or number of points.
- Σ_{targ} is a union of smooth disjoint curves in \mathbb{R}^2 .
- The directional derivatives

$$\partial U_{\text{targ}}(m + 0^+ h) \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} (U_{\text{targ}}(m + \epsilon h) - U_{\text{targ}}(m)) / \epsilon = |\langle h, n_{\text{targ}}(m) \rangle|.$$

exist for $m \in \Sigma_{\text{targ}}$ and $h \in \mathbb{R}^2$, and are negative if h is not tangent to Σ_{targ} . If h is tangent to Σ_{targ} , the function $U(m + \epsilon h)$ is differentiable at $\epsilon = 0$, with derivative denoted $\partial_m U_{\text{targ}} \cdot h$.

Let $R_{targ} = \mathbb{R}^2 \setminus (\partial S_{targ} \cup \Sigma_{targ})$. The gradient of U_{targ} on this set is well-defined and has norm 1. On ∂S_{targ} , we have $U_{targ} = 0$ and

$$\partial U_{targ}(m + 0^+h) = |\langle h, n_{targ}(m) \rangle|.$$

We have :

$$q'(0) = \int_{\mathbb{T}} \partial U_{targ}(\gamma(s) + 0^+v(s)) |\gamma'(s)| ds + \int_{\mathbb{T}} U_{targ}(\gamma(s)) \langle \tau_s, \partial_s v \rangle ds$$

Denote $\mathbb{T}_0 = \gamma^{-1}(R_{targ})$, $\mathbb{T}_+ = \gamma^{-1}(\partial S_{targ})$ and

$$\mathbb{T}_* = \{s \in \mathbb{T}, \gamma(s) \in \Sigma_{targ}, v(s) \text{ tangent to } \Sigma_{targ}\}$$

with the convention that 0 is always tangent to Σ_{targ} . For the remaining points in \mathbb{T} (up to a finite number), $\partial U_{targ}(m + 0^+v(s)) \leq 0$ so that the first integral is bounded by

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}_0} \langle \nabla_{\gamma_s} U_{targ}, v(s) \rangle |\gamma'(s)| ds \\ & + \int_{\mathbb{T}_+} |\langle n(s), v(s) \rangle| |\gamma'(s)| ds + \int_{\mathbb{T}_*} \partial_{\gamma(s)} U_{targ} \cdot v(s) |\gamma'(s)| ds \end{aligned} \quad (7.39)$$

We now address the integration by parts needed for the second integral. This leads to compute the derivative, with respect to s , of $U_{targ}(\gamma(s))$. Consider the three cases : (i) $\gamma(s) \in R_{targ}$; (ii) $\gamma(s) \in \partial S_{targ}$ and $\gamma'(s)$ is tangent to ∂S_{targ} ; (iii) $\gamma(s) \in \Sigma_{targ}$ and $\gamma'(s)$ is tangent to Σ_{targ} . Points which are in none of these categories are isolated in \mathbb{T} and therefore do not contribute to the integral. In all these cases, the function $s \mapsto U_{targ}(\gamma(s))$ is differentiable. Moreover, in case (ii), the differential is 0, and in case (iii), the resulting term cancels with the integral over T_* above. All this together implies that

$$\begin{aligned} q(0+) & \leq \int_{\mathbb{T}_0} \langle \nabla_{\gamma_s}^\perp U_{targ}, v(s) \rangle |\gamma'(s)| ds + \\ & \int_{\mathbb{T}_+} |\langle n(s), v(s) \rangle| |\gamma'(s)| ds - \int_{\mathbb{T}} U_{targ}(\gamma(s)) \kappa_s n_s ds. \end{aligned} \quad (7.40)$$

This finally implies

Theorem 8 *Let $p \geq k \geq 2$ and assume that V is compactly embedded in $C_0^{p+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Let S_{temp} and S_{targ} be two C^k Jordan shapes. Then the conclusions of theorem 5 hold for*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|_V^2 dt + \lambda \int_{\mathbb{T}} U_{targ}(\gamma_1^u(s)) |\partial_s \gamma_1^u| ds.$$

with $U_{targ} = \text{dist}(\partial S_{targ}, \cdot)$ and

$$p_1(s) = -\lambda |\gamma_1'(s)| (\beta_1(s) - U_{targ}(\gamma_1(s)) \kappa_1(s)) n_1(s)$$

with $\beta_1(s) = \langle \nabla_{\gamma_s}^\perp U_{targ}, n_1(s) \rangle$ if $\gamma_1(s) \in R_{targ}$, $\beta_1(s) = 0$ if $\gamma_1(s) \in \Sigma_{targ}$ and $|\beta_1(s)| \leq 1$ in $\gamma_1(s) \in \partial S_{targ}$.

7.7 Existence and uniqueness of the hamiltonian flow

In this short section, we show that the hamiltonian flow exists globally in time for any initial data in the phase space.

Theorem 9 (Flow Theorem) *Assume that V is continuously embedded in $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ with a C^2 kernel K having bounded second order derivative. Let $H : L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by*

$$H(\gamma, p) = \frac{1}{2} \int \overset{t}{p}(y) K(\gamma(y), \gamma(x)) p(x) dx dy$$

Then for any initial data (γ_0, p_0) there exists a unique solution $(\gamma, p) \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2))$ of the ODE

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \partial_p H(\gamma, p) \\ \dot{p} = -\partial_\gamma H(\gamma, p) \end{cases} \quad (7.41)$$

where $\partial_p H(\gamma, p) = \int K(\gamma(\cdot), \gamma(y)) \gamma(y) dy$ and $\partial_\gamma H(\gamma, p) = p(\cdot)^* \int \partial_1 K(\gamma(\cdot), \gamma(y)) p(y) dy$.

Proof The existence of a solution in small time is straightforward since the smoothness conditions on the kernel implies that there exists $M > 0$ such that $|\partial_p H(\gamma, p) - \partial_p H(\gamma', p')|_2 \leq M(|p - p'|_2 + |p|_2 |\gamma - \gamma'|_2)$ and $|\partial_\gamma H(\gamma, p) - \partial_\gamma H(\gamma', p')|_2 \leq M(|p|_2^2 |\gamma - \gamma'|_2 + |p|_2 |p - p'|_2)$. Thus $\partial_\gamma H$ and $\partial_p H$ is uniformly Lipschitz on any ball in $L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R}^2)$. This implies obviously the local existence and uniqueness of the solution for any initial data but also that for any maximal solution defined on $[0, T[$ with $T > \infty$, then

$$\lim_{t \rightarrow T} (|\gamma_t|_2 + |p_t|_2) = +\infty \quad (7.42)$$

The global existence in time follows from standard arguments : Assume that (γ_t, p_t) is a maximal solution defined on $[0, T[$ with $T < \infty$. Since V is continuously embedded in $C_0^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, we deduce that $m \rightarrow v(m) = \int K(m, \gamma_t(s')) p_t(s') ds$ defines an element $v \in V$ with continuous differential and such that $|dv|_\infty \leq M|v|_2$ with M independent of v . Hence $|\partial_\gamma H(\gamma_t, p_t)|_2 = |d_{\gamma_t} v(p_t)|_2 \leq M|v|_V = MH(\gamma_t, p_t)^{1/2}$. Since H is constant along the solution, we get $|\gamma_t - p_0|_2 \leq MT \sqrt{H(\gamma_0, p_0)}$ so that $|\dot{\gamma}_t|_2 \leq |K|_\infty (|p_0|_2 + MT \sqrt{H(\gamma_0, p_0)})$ and $|\gamma_t - \gamma_0|_2 \leq |K|_\infty T (|p_0|_2 + MT \sqrt{H(\gamma_0, p_0)})$. This is in contradiction with (7.42). □

7.8 Conclusion

We have spent some time, in this paper, in order to provide, for specific examples of interest, the Hamiltonian structure of large deformation curve matching. The central element in this structure, is the momentum $p_t, t \in [0, 1]$, and the fact that the deformation

can be reconstructed exactly from the template and the knowledge of the initial momentum p_0 .

This implies that p_0 can be considered as a *relative signature* for the deformed shape with respect to the template. In all cases, it was a vector-valued function defined on the unit circle, characterized in fact by a scalar when the data attachment term is geometric. Because the initial momentum is always supported by the template, it is possible to add them, or average them without any issue of registering the data, since the work is already done. These facts lead to simple procedures for statistical shape analysis, when they are based on the momentum, and some developments have already been provided in [54] in the case of landmark-based matching.

This paper therefore provides the theoretical basis for the computation of this representation. Future works will include the refinement and development of numerical algorithms for its computation. Such algorithms already exist, for example, in the case of measure-based matching, but still need to be developed in the other cases.

Bibliographie

- [1] A. Adams, R. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] N. Arad, N. Dyn, D. Reinfeld, and Y. Yeshurun. Image warping by radial basis functions : application to facial expressions. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 56(2) :161–172, 1994.
- [3] V. I. Arnold. Sur la géometrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1 :319–361, 1966.
- [4] N. Aronszajn. La théorie des noyaux reproduisants et ses applications. I. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 39 :133–153, 1943.
- [5] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 :337–404, 1950.
- [6] R. Bajcsy and C. Broit. Matching of deformed images. In *The 6th international conference in pattern recognition*, pages 351–353, 1982.
- [7] M. Bakircioglu, S. Joshi, and M. Miller. Landmark matching on brain surfaces via large deformation diffeomorphisms on the sphere. In *Proc. SPIE Medical Imaging 1999 : Image Processing*, volume 3661, pages 710–715, San Diego, CA, February 1999.
- [8] M. F. Beg, M. I. Miller, A. Trouvé, and L. Younes. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms. *Int J. Comp. Vis.*, 61(2) :139–157, 2005.
- [9] S. Bochner. Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. *Math. Ann.*, 108 :378–410, 1933.
- [10] L. Bookstein, F. Principal warps : Thin plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE trans. PAMI*, 11(6) :567–585, 1989.
- [11] W. Boothby. *Introduction to Differentiable Manifolds and Riemann Geometry*, 2nd ed. Academic Press, 1986.
- [12] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, 1983. English translation : Springer Verlag.

- [13] P. Cachier and N. Ayache. Isotropic energies, filters and splines for vectorial regularization. *J. of Math. Imaging and Vision*, 20(3) :251–265, May 2004.
- [14] E. Christensen, G. D. Rabbitt, R. and I. Miller, M. Deformable templates using large deformation kinematics. *IEEE trans. Image Proc.*, 1996.
- [15] H. Chui and A. Rangarajan. A new point matching algorithm for non-rigid registration. *Computer Vision and Image Understanding*, 89 :114–141, 2003.
- [16] M. Chupin, D. Hasboun, S. Baillet, S. Kinkingnéhun, B. Dubois, and L. Garnero. Competitive segmentation of the hippocampus and the volumetry in alzheimer’s disease. In *10th Annual Meeting of the Organization for Human Brain Mapping*, June 13-17, 2004.
- [17] S. Cohen, G. Elber, and B. Bar-Yehuda. Matching of freeform curves. *Computer-Aided design*, 29(5) :369–378, 1997.
- [18] C. Delfour, M and J.-P. Zolésio. *Shapes and Geometries. Analysis, differential calculus and optimization*. SIAM, 2001.
- [19] M. do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Springer-Verlag, 1994.
- [20] M. Droske and M. Rumpf. A variational approach to non-rigid morphological image registration. Technical report, University of Duisburg, 2004.
- [21] H. Drury, D. V. Essen, M. Corbetta, and A. Snyder. Surface-based analyses of the human cerebral cortex. In A. T. et al., editor, *Brain Warping*, pages 337–363. Academic Press, 1999.
- [22] P. Dupuis, U. Grenander, and M. Miller. Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching. *Quarterly of Applied Math.*, 1998.
- [23] N. Dyn. Interpolation and approximation by radial and related functions. In K. Chui, C. L. Shumaker, L, and D. Ward, J, editors, *Approximation theory VI : vol. 1*, pages 211–234. Academic Press, 1989.
- [24] B. Fischl, M. Sereno, R. Tootell, and A. Dale. High-resolution intersubject averaging and a coordinate system for the cortical surface. *Human Brain Mapping*, 8 :272–284, 1999.
- [25] D. Geiger, A. Gupta, A. Costa, L, and J. Vlontzos. Dynamic programming for detecting, tracking and matching deformable contours. *IEEE PAMI*, 17(3) :295–302, 1995.
- [26] J. Glaunes, A. Trounev, and L. Younes. Diffeomorphic matching of distributions : A new approach for unlabelled point-sets and sub-manifolds matching. In *Proceedings of CVPR’04*, 2004.
- [27] J. Glaunès, M. Vaillant, and I. Miller, M. Landmark matching via large deformation diffeomorphisms on the sphere. *Journal of Mathematical Imaging and Vision, MIA 2002 special issue*, (to appear) 2003.

- [28] J. Glaunès, A. Trouvé, and L. Younes. Modeling planar shape variation via hamiltonian flows of curves. *Analysis and Statistics of Shapes*, 2005. To appear.
- [29] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73(??) :325–348, Aug. 1987. This paper is credited as the origin of the fast multipole method, with an $O(N)$ algorithm. It was reprinted in the same journal, vol. 135, pp. 280–292, August 1997.
- [30] L. Greengard and J. Strain. The fast Gauss transform. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 12(1) :79–94, Jan. 1991.
- [31] U. Grenander. *General Pattern Theory*. Oxford Science Publications, 1993.
- [32] U. Grenander and I. Miller, M. Computational anatomy : An emerging discipline. *Quarterly of Applied Mathematics*, LVI(4) :617–694, 1998.
- [33] R. Holm, D, T. Ratnanather, J, A. Trouvé, and L. Younes. Soliton dynamics in computational anatomy. *Neuroimage*, 23 :S170–S178, 2004.
- [34] J. Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Springer 1998 (Universitext), 2nd edition, 1956.
- [35] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 1998. 2nd edition.
- [36] E. Klassen, A. Srivastava, W. Mio, and S. Joshi. Analysis of planar shapes using geodesic paths on shape spaces. *Ieee Trans. PAMI*, 2002.
- [37] I. Miller, M, A. Trouvé, and L. Younes. On the metrics and euler-lagrange equations of computational anatomy. *Annual Review of biomedical Engineering*, 4 :375–405, 2002.
- [38] I. Miller, M, A. Trouvé, and L. Younes. Geodesic shooting for computational anatomy. Technical report, Johns Hopkins University, 2002.
- [39] I. Miller, M and L. Younes. Group action, diffeomorphism and matching : a general framework. *Int. J. Comp. Vis*, 41 :61–84, 2001. (Originally published in electronic form in : *Proceeding of SCTV 99*, <http://www.cis.ohio-state.edu/szhu/SCTV99.html>).
- [40] C. Müller. *Spherical harmonics*, volume 17 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1966.
- [41] F. Morgan. *Geometric measure theory, 2nd ed.* Acad. Press, INC., 1995.
- [42] Nocedal and Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, 2000.
- [43] S. Saitoh. Theory of reproducing kernels. In *Analysis and applications—ISAAC 2001 (Berlin)*, volume 10 of *Int. Soc. Anal. Appl. Comput.*, pages 135–150. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [44] H. Sakoe and S. Chiba. Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition. *IEEE Trans. Accoustic, Speech and Signal Proc.*, 26 :43–49, 1978.

- [45] I. J. Schoenberg. Metric spaces and completely monotone functions. *Ann. of Math. (2)*, 39(4) :811–841, 1938.
- [46] L. Schwartz. Sous-espaces hilbertiens d’espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants). *J. Analyse Math.*, 13 :115–256, 1964.
- [47] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [48] A. Trouvé. Infinite dimensional group action and pattern recognition. Technical report, DMI, Ecole Normale Supérieure, 1995.
- [49] A. Trouvé. An infinite dimensional group approach for physics based model. Technical report, 1995.
- [50] A. Trouvé. Diffeomorphism groups and pattern matching in image analysis. *Int. J. of Comp. Vis.*, 28(3) :213–221, 1998.
- [51] A. Trouvé and L. Younes. On a class of optimal matching problems in 1 dimension. *Siam J. Control Opt.*, 2000.
- [52] A. Trouvé and L. Younes. Local geometry of deformable templates. Technical report, Université Paris 13, 2002.
- [53] A. Trouvé and L. Younes. Local geometry of deformable templates. *SIAM J. Math. Anal.*, 2005. To appear.
- [54] M. Vaillant, I. Miller, M, A. Trouvé, and L. Younes. Statistics on diffeomorphisms via tangent space representations. *Neuroimage*, 23(S1) :S161–S169, 2004.
- [55] L. Vincent, T and J. Grantham, W. *Nonlinear and optimal control systems*. Wiley, 1997.
- [56] T. Werther. *Optimal Interpolation in Semi-Hilbert Spaces*. PhD thesis, University of Vienna, 2003.
- [57] C. Yang, R. Duraiswami, N. A. Gumerov, and L. S. Davis. Improved fast gauss transform. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision, France*, October 2003.
- [58] L. Younes. Computable elastic distances between shapes. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(2) :565–586, 1998.
- [59] L. Younes. Optimal matching between shapes via elastic deformations. *Image and Vision Computing*, 1999.
- [60] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Applications to mathematical physics*. Springer, 1995.